

**UNIVERSIDAD COMPLUTENSE DE MADRID**  
**FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS**  
**Departamento de Electricidad y Electrónica**



**TESIS DOCTORAL**

**Contribuciones al estudio y diseño de un sistema de control  
numérico basado en microprocesadores**

MEMORIA PARA OPTAR AL GRADO DE DOCTOR  
PRESENTADA POR

**Ángel Alique Palomar**

DIRECTOR:

**José Ramón Alique López**

**Madrid, 2015**

Angel Alique Palomar

10.249  
60-80



x - 53-031063-4

CONTRIBUCIONES AL ESTUDIO Y DISEÑO DE UN SISTEMA  
DE CONTROL NUMERICO BASADO EN MICROPROCESADORES

Departamento de Electricidad y Electrónica  
Facultad de Ciencias Físicas  
Universidad Complutense de Madrid  
1980

© Angel Alique Palomar

Edita e imprime la Editorial de la Universidad  
Complutense de Madrid. Servicio de Reprografía  
Noviciado, 3 Madrid-8  
Madrid, 1980

Xerox 9200 XB 480

Depósito Legal: M-15605-1980

Esta memoria, dirigida por el Doctor D. José Ramón Alique López, fue presentada el día 27 de junio de 1979 y juzgada por el Tribunal formado por los siguientes Profesores:

D. José García Santesmases  
D. Maximino Rodríguez Vidal  
D. Mariano Mellado Rodríguez  
D. Antonio Hernández Cachero  
D. Sebastián Dormido Bencomo

La calificación obtenida fue de Sobre saliente "cum laude".

CONTRIBUCIONES AL ESTUDIO Y DISEÑO  
DE UN SISTEMA DE CONTROL NUMÉRICO  
BASADO EN MICROPROCESADORES

Memoria presentada por  
ANGEL ALIQUE PALOMAR  
para optar al grado de  
Doctor en Ciencias Físicas

Quiero expresar mi agradecimiento a todos los compañeros del Instituto de Automática Industrial que han colaborado en las investigaciones que han dado lugar a la presente memoria. De manera especial a los componentes de la Sección de Informática Industrial, a José María Guillén, Carlos González y José Ramón Alique, que la ha dirigido, a Loly por animarle a redactarla y a Mercedes Palenciano, que la ha mecanografiado.

Igualmente, mi gratitud al Profesor Don Sebastián Dormido Bencomo, sin cuyo asesoramiento y ayuda en todos los órdenes no hubiese sido posible la presentación de esta memoria.

## I N D I C E

	<u>Página</u>
Propósito y Desarrollo .....	1
Capítulo I. Planteamiento del problema .	
1.1. Antecedentes .....	9
1.2. Funciones típicas de un control numérico de tipo medio .....	10
1.2.1. Funciones no críticas .....	11
1.2.2. Funciones críticas .....	13
1.3. El control numérico con computador .....	13
1.4. Microprocesadores y microcomputadores .....	14
1.5. Los microprocesadores y el control numérico. De- limitación de objetivos.....	18
Capítulo II. El sistema de control de posición	
2.1. Introducción .....	23
2.2. El sistema electromecánico de posicionado .....	23
2.3. Sistema de control para operación punto a punto..	27
2.4. Sistema de control para operación en contorno...	30
2.4.1. Posibles configuraciones del sistema .....	31
2.4.2. Comportamiento dinámico de las distintas configuraciones .....	45
2.4.2.1. Análisis de estabilidad .....	48
2.4.3. Criterios de optimización. Tiempo de res- puesta .....	50
2.4.4. Errores de perfil en contorno .....	57
2.4.4.1. Contornos rectos en el plano ....	57
2.4.4.2. Contornos circulares .....	63

Página

Capítulo III. Generación de curvas.

3.1. Introducción .....	85
3.2. Métodos paramétricos .....	86
3.2.1. Analizador Diferencial Digital .....	86
3.3. Métodos no paramétricos .....	94
3.3.1. Método de Jordan, Lennon y Holm .....	99
3.3.2. Método de Bresenham y Pitteway .....	101
3.4. Un método lineal no paramétrico para generación de curvas .....	103
3.4.1. Interpolación lineal en el plano .....	105
3.4.1.1. Estudio de errores .....	113
3.4.2. Interpolación lineal en el espacio .....	114
3.4.3. Interpolación circular .....	121
3.4.4. Extensión del método al trazado de cónicas .....	133

Capítulo IV. Diseño óptimo y simulación del sistema de  
operación en contorno de un CNC.

4.1. Introducción .....	141
4.2. Diseño óptimo: cálculo de parámetros .....	142
4.2.1. Ejemplo de diseño de un sistema de control de posición .....	146
4.3. Simulación: Descripción general .....	150
4.3.1. Entrada de datos .....	150
4.3.2. Cálculo de la velocidad y posición de la herramienta .....	152
4.3.3. Cálculo de la distancia .....	155
4.3.4. Modo de actuación del interpolador .....	155
4.3.5. Modo de actuación global del programa simulador .....	156



Página

4.4. Consecuencia del trazado de perfiles .....	157
Conclusiones .....	168
Bibliografía .....	172



#### PROPOSITO Y DESARROLLO

La aparición de los microprocesadores ha supuesto la mayor revolución de los últimos años en el mundo de la electrónica. Debido a su bajo costo, su versatilidad, y su gran fiabilidad, permiten reducir en tamaño y precio la circuitería de un sistema, sustituyendo en buena parte la lógica cableada por la lógica programada residente en memorias de sólo lectura.

Sin embargo la introducción de microprocesadores ha supuesto la necesidad de modificar a veces profundamente la filosofía de diseño de los sistemas electrónicos, modificación impuesta por la relativamente baja potencia de procesamiento de los microprocesadores actuales.

Esta afirmación es especialmente válida en aquellos procesos críticos en los que el procesamiento de los datos en tiempo real exige potencias de cálculo muy considerables.

Los sistemas de control numérico son un ejemplo típico de sistemas electrónicos que se han visto profundamente influidos por la aparición de los microprocesadores.

Hasta la aparición de los microprocesadores los sistemas de control numérico se dividían en dos grandes sectores: el de los sistemas destinados a controlar máquinas-herramienta muy costosas y sofisticadas donde se podía incluir como elemento básico de síntesis un minicomputador dentro del sistema de control sin que encareciese excesivamente a éste y el sector de los controles de tipo medio y pequeño destinados a máquinas más sencillas e implementadas con lógica cableada.

En especial dentro de esta segunda categoría de sistemas de control numérico, la sustitución de gran parte de la lógica cableada por un microprocesador hace preciso cambiar a veces profundamente el modo de funcionamiento del control numérico.

La utilización del microprocesador como elemento básico de síntesis de un control numérico impone condiciones muy estrictas en la organización del sistema, en el diseño de sus distintas unidades funcionales e incluso en la elección del microprocesador propiamente dicho.

Para la organización del sistema habrá que recurrir según la categoría del equipo de control numérico a un procesamiento distribuido entendiendo esto en su sentido más amplio. En los equipos de la gama alta, este procesamiento distribuido -

se realizará mediante sistemas multimicroprocesador (arquitectura MIMD) apoyados en ciertas funciones por periféricos LSI inteligentes. Estos periféricos de microcomputador aumentan considerablemente el rendimiento del sistema de control numérico, ya que al funcionar en paralelo con el microprocesador requieren una atención mínima por su parte.

El microprocesador puede entonces dedicarse fundamentalmente a la administración de tareas y a la toma de decisiones.

En los equipos de la gama media y baja bastará normalmente con recurrir a un único procesador apoyado por los periféricos inteligentes que realizan fundamentalmente funciones de entrada-salida o incluso por periféricos universales que son verdaderos microcomputadores en una pastilla y que por tanto pueden ser programados para realizar cualquier función periférica deseada.

Aún con la creación de sistemas con capacidad de procesamiento distribuido y sobre todo en los sistemas con procesador único, es necesario que dicho procesador cumpla ciertas condiciones básicas. La condición más importante viene impuesta por la magnitud de los valores numéricos a manejar, siempre en aritmética entera.

Esta condición impone procesamiento de palabras de un mínimo de 24 bits por lo que se deberá trabajar en triple precisión con un microprocesador típico de 8 bits.

Por razones que se discuten en la memoria, la unidad aritmética deberá ser de alta precisión y velocidad.

Además de estas condiciones básicas impuestas a la organización del sistema y al propio microprocesador, será necesario tener en cuenta requisitos muy estrictos en el diseño de las unidades funcionales de un control numérico implementado con microprocesadores.

El propósito de la presente memoria consiste en estudiar la influencia que tiene el microprocesador en el diseño de un control numérico. Esta influencia va a condicionar especialmente el diseño de la unidad de interpolación y el del servomecanismo de control de posición.

Hasta la aparición de los microprocesadores el proceso de interpolación lo realizaba un Analizador Diferencial Digital (DDA) normalmente incluido dentro del propio equipo de control.

En la gama más alta que utilizaba un minicomputador, el proceso de interpolación lo realizaba, aunque con ciertas limitaciones, el propio minicomputador por programa.

La inclusión del microprocesador hace recomendable la utilización de otras técnicas de integración distintas a las de los DDA.

Así han aparecido los primeros DDA modificados que realizan la generación de curvas a partir de la representación no paramétrica de la curva deseada. Estos algoritmos no paramétricos de interpolación, si bien presentan características comunes, se diferencian en la forma de selección del desplazamiento a efectuar desde el punto alcanzado a uno de los ocho posibles que lo rodean sobre una cuadrícula cuyo lado es función de la precisión deseada.

La cantidad y el tipo de las operaciones aritméticas necesarias para la selección del nuevo punto (ciclo básico de generación de salidas del interpolador) determinan la bondad de un algoritmo para su implementación por programa sobre un microcomputador. Por consiguiente, para que el rendimiento sea máximo es necesario disponer de algún algoritmo de interpolación que cumpla como requisitos básicos tener un ciclo básico de generación de salidas mínimo, ser lineal y sencillo en la iniciación de variables, que permita realizar desplazamientos simultáneos en los ejes y que utilice un criterio de parada muy sencillo.

El desarrollo de un algoritmo que verifique estas condiciones ha sido uno de los principales logros de nuestra investigación.

Otro propósito de la investigación realizada ha sido el estudiar la influencia del microprocesador no sólo en la configuración del servomecanismo sino también en el comportamiento dinámico del

lazo de control. Las investigaciones realizadas han permitido determinar la influencia que tiene el período de muestreo en la estabilidad y en el tiempo de respuesta del sistema. Asimismo, el estudio de la respuesta en frecuencia ha hecho posible evaluar los errores de perfil en contorno, en sistemas basados en microprocesadores, relacionando la aceleración centrípeta de avance en la generación de arcos de circunferencia con parámetros tales como el período de muestreo y la constante mecánica del motor.

Como consecuencia de todos los resultados anteriores se ha obtenido un método integrado de diseño de sistemas de control numérico basados en microprocesadores, lo que constituía nuestro primordial objetivo.

Mediante este método es posible, dadas las constantes de tiempo mecánicas de los motores de continua utilizados y el límite inferior en el período de muestreo impuesto por cada microprocesador y cada diseño concreto, encontrar el valor óptimo de los parámetros que condicionan el comportamiento dinámico del sistema muestreado de control.

La memoria que se presenta consta de cuatro capítulos. En el primero, tras unas notas históricas sobre los sistemas de control numérico, se desglosan las principales tareas típicas a realizar por éste, indicando y justificando las que se consideran críticas. Se presentan los microprocesadores y finalmente se delimitan los temas a tratar en capítulos posteriores.



El capítulo segundo se dedica al estudio del sistema de control de posición analizando tanto la operación punto a punto como la de contorno.

A continuación se presentan distintas configuraciones de sistemas de control para operación en contorno analizando sus ventajas e inconvenientes desde el punto de vista de su implementación electrónica (hardware) y de su programación (software). Se continúa este capítulo estudiando el comportamiento dinámico de las distintas configuraciones. La elección de un criterio de optimización permite hacer un análisis de estabilidad y un estudio del tiempo de respuesta, encontrándose una ecuación de tercer grado que suministra el valor óptimo de la ganancia en lazo abierto.

Finalmente se estudian los errores de perfil en contorno, en especial en la generación de rectas y arcos de circunferencia. Estas investigaciones permiten relacionar la aceleración centrípeta de avance con parámetros tales como la constante de tiempo mecánica del motor y el período de muestreo.

El tercer capítulo se inicia estudiando someramente los métodos paramétricos de interpolación para pasar inmediatamente al estudio de los no paramétricos.

Se presentan los métodos de Jordan y de Pitteway pasando a continuación a la exposición

detallada del algoritmo que hemos desarrollado. Esta exposición incluye la interpolación lineal en el plano, lineal en el espacio y circular en el plano. Finalmente se realiza una extensión del método a la generación de cualquier tipo de cónicas.

De acuerdo con todos los resultados anteriores se expone en el capítulo IV un método integrado de diseño. Un ejemplo sirve para valorar mejor el método de diseño que proporciona además un control automático óptimo de la aceleración y deceleración del sistema.

La simulación realizada en un minicomputador de una configuración de servomecanismo elegida de acuerdo con el capítulo II, junto con el método de interpolación propuesto en el capítulo III ha permitido el trazado de contornos en el plano y la constatación de las pérdidas de precisión (redondeos) que se producen debido a las características de los lazos completos de posición (retardos del lazo), sugiriéndose un procedimiento para disminuirlas.

Para este fin ha sido necesario simular el conjunto regulador - motor suponiendo que en su función de transferencia existe un único polo dominante, el debido a la constante de tiempo mecánica del motor. Para finalizar la memoria se presentan las principales aportaciones y conclusiones así como una relación del material bibliográfico consultado.

## C A P I T U L O    I

### PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

#### 1.1. ANTECEDENTES

Las máquinas-herramienta han jugado un papel fundamental en el desarrollo tecnológico, hasta el punto de ser su tasa de crecimiento uno de los factores que gobiernan el desarrollo industrial (UN 74).

Los primeros intentos de automatizar el funcionamiento de una máquina comenzaron a principios del siglo XIX, pues ya en 1801 Jacquard Loom ideó una máquina textil que permitía realizar distintos tipos de tejido variando una secuencia de operación que le era dada por medio de tarjetas perforadas.

Desde entonces todos los esfuerzos se han encaminado a incrementar la productividad, precisión, rapidez y flexibilidad de las máquinas-herramienta. Otra función que ha revestido importancia, si bien no desde el punto de vista cuantitativo, es la viabilidad de mecanización de determinadas piezas muy complejas, que difícilmente se hubieran podido fabricar manualmente.

Los primeros automatismos poco hicieron en favor de la flexibilidad del sistema, dado que eran fundamentalmente dispositivos de propósito particular y

por tanto muy rígidos en su concepción, sistemas específicos para máquinas específicas (para posicionadores punto a punto, para tornos, etc.).

Hacia 1942 apareció el que podríamos llamar en verdad primer control numérico, y tuvo su origen en las necesidades impuestas por la industria aeronáutica, donde las piezas a fabricar pueden llegar a ser muy complejas.

Desde entonces, las mejoras introducidas en los diseños tuvieron en cuenta el incrementar la versatilidad de los sistemas de control numérico, que es la mejor virtud de estos automatismos.

Para los propósitos de nuestro trabajo, podríamos definir el control numérico como todo dispositivo capaz de dirigir posicionamientos de un órgano mecánico móvil en el que las órdenes relativas a sus desplazamientos son elaboradas en forma totalmente automática a partir de las informaciones definidas bien manualmente (funcionamiento semiautomático), bien por intermedio de un programa (funcionamiento automático) (AL 79).

## 1.2. FUNCIONES TÍPICAS DE UN CONTROL NUMÉRICO DE TIPO MEDIO

Un sistema de control numérico puede ser analizado en función de las tareas que realiza y que podemos dividir en dos grandes grupos: funciones no críticas y funciones críticas. Son las primeras aquellas que no exigen un tratamiento determinante

en el tiempo para satisfacer las especificaciones del sistema. Las segundas, por el contrario, precisan una respuesta en tiempo real para cumplir las prestaciones exigidas.

Veamos a continuación con más detalle cada uno de estos grupos.

#### 1.2.1 Funciones no críticas

Estas funciones pueden a su vez subdividirse en dos secciones: la primera engloba todas las funciones que se realizan sin estar mecanizando una pieza y la segunda las que tienen lugar durante la mecanización.

La primera podemos denominarla edición de programas-pieza, entendiendo por programa-pieza un conjunto de bloques que fijan un proceso de mecanización y describiendo un bloque una operación a realizar por el sistema.

Entre las tareas típicas de la edición de programas-pieza, podemos citar:

- . Introducción de programas-pieza desde el teclado o consola.
- . Lectura de programas-pieza desde un medio de almacenamiento externo (cinta magnética o perforada, disco magnético flexible, etc.).
- . Grabación de programas-pieza en memoria interna.
- . Modificación de programas-pieza en memoria interna ya sea añadiendo, suprimiendo o alterando bloques.

- . Visualización en consola de bloques residentes en memoria interna.
- . Cualquier otra tarea relacionada con la manipulación de datos.

En la segunda sección de funciones no críticas incluimos todas las que se simultanean con las funciones críticas que veremos en el próximo apartado y muchas veces su tratamiento se reduce a una acción sobre algún dispositivo dependiente de la máquina o de aviso al operador, siendo en otras ocasiones una indicación del tipo de trabajo a realizar.

Estas tareas se suelen dividir en preparatorias y auxiliares. A título ilustrativo, enumeramos algunos de ambos tipos a continuación (IS 75).

Ejemplos de tareas preparatorias:

- . Elección del plano de trabajo (XY, XZ, YZ).
- . Tipo de interpolación
- . Compensación de radio
- . Programación absoluta-relativa
- . Ciclos fijos (roscado, taladrado, etc)

Ejemplos de tareas auxiliares:

- . Parada programada
- . Sentido de rotación de herramienta
- . Indicación de cambio de herramienta
- . Abrir o cerrar la salida de lubricante
- . Cualquier aviso del operador a través de las luces de consola o del grupo impresor (si lo hubiera).

Además de estas funciones existen otras destinadas a programar funciones tales como temporización, velocidad de rotación del útil, etc.

#### 1.2.2 Funciones críticas

Englobamos en este apartado las funciones relacionadas con velocidad de avance, interpolación y control del lazo de posición. Entre las tareas típicas podemos citar:

- Cálculo de la velocidad de avance en cada eje a partir de la velocidad de avance dada por el programa-pieza.
- Generación de la trayectoria definida por programa
- Cálculo del error de posición, a fin de actualizar el servomecanismo de control de posición para cada uno de los ejes.
- Compensación del radio de herramienta.
- Interpretación de bloques.

### 1.3. EL CONTROL NUMERICO CON COMPUTADOR

En un principio todos los controles numéricos, cualquiera que fuese su complejidad, estaban implementados utilizando lógica cableada. La aparición y comercialización de los minicomputadores proporcionó nuevos elementos a los diseñadores, que vieron como su introducción en los controles numéricos mejoraba grandemente las prestaciones de sus equipos, facilitando el control de periféricos, la gestión de --

memoria y las comunicaciones con el operador. Además, al disponer de un sistema programable era más fácil construir equipos físicamente similares pero de funciones distintas, adaptables a diversos tipos de máquinas-herramienta, mas versátiles y más económicos, al ser producidos en series mayores y variando únicamente el sistema de programación que contenían. Nació así el control numérico con computador.

Sin embargo, el precio de los minicomputadores hacía que sólo resultara rentable su incorporación a sistemas destinados a controlar máquinas-herramienta grandes, con posibilidad de mecanizar piezas en tres o más ejes.

Por su parte, los sistemas más sencillos, tales como los posicionadores y los de contorno en dos dimensiones, siguieron desarrollándose apoyados en técnicas convencionales de lógica cableada, incorporando naturalmente los nuevos componentes electrónicos que iban apareciendo en el mercado, pero sin la posibilidad de incluir sistemas programables inteligentes, debido a la pérdida de competitividad que su incorporación, dado su elevado costo, suponía frente a los sistemas tradicionales.

#### 1.4 MICROPROCESADORES Y MICROCOMPUTADORES

Los incesantes avances en el campo de la tecnología electrónica han permitido la construcción de circuitos integrados que cada vez son de mayor densidad y complejidad de funciones, desembocando a --



finales de la década de los sesenta en la aparición de los microprocesadores como respuesta a la búsqueda de sistemas compactos y económicos cuya estructura fuera independiente de las funciones que fueran capaces de realizar.

Un microprocesador (AL 77) es la unidad central de proceso de un computador contenida en uno o unos pocos circuitos integrados. Ayudado por otras pastillas de circuito integrado del tipo LSI (circuitos de elevada densidad de integración) forma un microcomputador, sistema programable de propósito general.

Habitualmente cada microcomputador dispone de una familia más o menos extensa de componentes (microprocesadores, memorias de diversos tipos- sólo lectura, de almacenamiento dinámico-, módulos de control, módulos de entrada-salida, etc) Si bien existen ya en el mercado sistemas completos de configuración fija contenidos en una sola pastilla, lo usual es configurar cada microcomputador en base a las pastillas disponibles para adaptarlo lo más exactamente posible al problema a resolver.

Una de las características que mejor fijan las características de los múltiples microprocesadores existentes en el mercado es, al igual que sucede con los miniordenadores, la longitud de palabra que emplean internamente.

Existen microcomputadores de 4 bits, aptos para aplicaciones que precisan poca velocidad de --

operación, que trabajan con números pequeños o que controlan dispositivos de lógica cableada que operan internamente en código BCD.

El mayor número de microprocesadores comercializados y vendidos en la actualidad tienen una longitud de palabra de 8 bits, lo que los hace muy aptos para trabajar con cadenas de caracteres (mayoritariamente en códigos ASCII o similar de 7 bits, más un bit de paridad), siendo muy utilizados en sistemas dedicados al control de comunicaciones, estaciones recogedoras y concentradoras de datos, pequeños sistemas de gestión, etc.

Está comercializado algún microprocesador de 12 bits de longitud de palabra, construido para emular a un minicomputador muy popular de la misma longitud.

Dieciseis bits es una longitud de palabra común a la mayoría de los minicomputadores del mercado. Por ello, los fabricantes de microcomputadores también han intentado invadir este área de aplicaciones y existen ya varios modelos comercializados, alguno de ellos como hermano menor de familias de minicomputadores y con programación totalmente compatible con ellos, lo que representa una gran ventaja para el usuario, pues se pueden desarrollar los sistemas de programación en un miembro mayor de la familia, ayudado por periféricos potentes, programas de utilidad, sistemas operativos, etc, y el código objeto obtenido hacerlo correr en un sistema dedicado

cuyo centro sea el microprocesador compatible, más económico y, desde luego, más lento, si bien la velocidad de operación de los microprocesadores está subiendo día a día.

Citaremos también los microprocesadores "en rodajas" (bit slice en inglés), llamados así por ser pequeñas unidades de cálculo (de 4, de 2 bits y hasta de 1 bit) que están diseñados para ser "enganchados" unos a otros y obtener un procesador de longitud de palabra múltiplo de la del módulo de base elegida por el usuario. Normalmente son microprogramables y se obtienen con ellos velocidades de operación muy altas. Pueden ser una buena solución para sistemas muy dedicados que exijan periodos de operación cortos.

El impacto que han producido los microprocesadores en el campo de los automatismos ha sido realmente espectacular. Dado su bajo precio y su pequeño tamaño, los sistemas inteligentes programables han comenzado a invadir áreas reservadas a la lógica cableada (como por ejemplo, electrodomésticos, básculas peso-precio, juegos electrónicos, etc.) añadiendo además las ventajas y posibilidades que brinda un sistema programable, donde cambiar una memoria de sólo lectura equivale a cambiar el funcionamiento del sistema sin alterar en absoluto su circuitería.

No sólo la electrónica de gran consumo ha absorbido microprocesadores; aparatos de medida, periféricos de computadores y demás productos del sector de la electrónica profesional cuentan, cada vez más,

con microprocesadores entre sus componentes. Han aparecido así sistemas de inteligencia distribuida y toda una serie de teorías acerca de su organización: sistemas jerárquicos, redes de procesadores de igual rango, procesamiento paralelo, etc.

El control numérico de máquinas-herramienta no podía ser ajeno a este fenómeno. Veamos en que forma pueden los microprocesadores condicionar el diseño de un control numérico.

#### 1.5. LOS MICROPROCESADORES Y EL CONTROL NUMERICO. DELIMITACION DE OBJETIVOS

Tanto los controls numéricos con minicomputador como los más modestos han comenzado a incorporar recientemente los microprocesadores a sus diseños.

Los primeros han descargado de trabajo el computador central, construyendo sistemas de inteligencia distribuida en los que el microprocesador pasa a ser el núcleo de un periférico inteligente de aquel. Los segundos también incluyen en sus catálogos comerciales al microprocesador como elemento integrante del sistema.

Pero hemos de hacer notar que las diferencias entre los antiguos catálogos y los actuales están en que en estos, junto a la mención del microprocesador se incluyen como nuevas características destacables del sistema presentado una serie de funciones muy clásicas en los sistemas informáticos, como puede ser una más fácil preparación y mantenimiento de programas-pieza, gestión de los soportes externos de memoria,

mayor comunicación con el operador, pruebas selectivas del estado correcto del sistema, etc, esto es, funciones propias de los programas de utilidad del sistema operativo de un computador.

Podríamos deducir de aquí que, en la mayoría de los controles numéricos de tipo medio y pequeño, el microprocesador ha venido a aumentar las prestaciones de los mismos, pero habitualmente su campo de influencia se ciñe a las funciones no críticas del sistema, que vimos en 1.2.1, tareas que no requieren exigencias de respuesta muy rápida y que normalmente trabajan con caracteres, siendo suficiente por tanto una longitud de palabra de 8 bits, pero sin que en ningún caso el microprocesador haya venido a alterar en profundidad diseños convencionales ya establecidos anteriormente en la parte del sistema que consideramos crítica.

Pero veamos con un par de ejemplos el porqué de catalogar a unas funciones como críticas, como exigentes del tratamiento en tiempo real que se apunta en 1.2.

Una velocidad máxima típica de avance en posicionamiento de una máquina-herramienta es de 12 metros/minuto. La precisión con que se va a efectuar el control de posición por el sistema de control numérico es de 10  $\mu$ . Esto quiere decir que a velocidad máxima el tiempo que se tarda en recorrer la unidad de longitud interna es de 50  $\mu$ sg. Un microprocesador rápido tiene un tiempo de ejecución de instrucción del orden de pocos  $\mu$ sg. Por tanto, se pueden ejecutar muy pocas instrucciones en esos 50  $\mu$ sg y si se intenta resolver mediante microprocesadores un control de posición habrá que darle al problema un planteamiento

tal que la respuesta en tiempo cumpla las especificaciones marcadas.

Esto sucede en posicionamiento, donde no es necesaria una coordinación en el movimiento de los ejes, ya que la herramienta no está en contacto con la pieza a mecanizar; lo único que interesa es conseguir una posición final precisa, que se puede obtener controlando con precisión el desplazamiento a lo largo de cada eje. Por el contrario, cuando se ha de realizar un contorno sobre la pieza (describir con la herramienta entrañando una recta de pendiente dada, un arco de circunferencia, etc.) es necesario sincronizar el avance de los ejes, de manera que el movimiento de la herramienta, resultante de la composición de aquellos, se produzca lo suficientemente próximo a la trayectoria prefijada para no exceder la tolerancia exigida. Aquí, una velocidad máxima típica de avance es de 6 metros/minuto en rectas. Se dispone, pues, de 100  $\mu$ s para recorrer 10  $\mu$  y en este tiempo se debe discernir como hay que actuar sobre cada uno de los ejes. Dada la velocidad de operación de los microprocesadores el problema presenta también dificultades, que en los sistemas de lógica cableada de propósito particular para interpolación se resuelven más fácilmente debido a su mucho menor tiempo de operación.

Evidentemente un microprocesador no puede atender simultáneamente todas las tareas, tanto críticas como no críticas, que conforman el control numérico. Habrá que recurrir a un procesamiento distribuido, entendiendo este término en un sentido amplio, bien de escalonamiento de funciones en el tiempo, bien diseñando un sistema con más de un pro-

cesador, bien apoyándose en los numerosos periféricos inteligentes que ofrecen los fabricantes de microcomputadores y que contribuyen a descargar de trabajo a la unidad central, como pueden ser, por ejemplo, los contadores programables, los controladores de teclado, etc.

Otro dato muy a tener en cuenta, y que condicionará la elección del microprocesador, son los valores numéricos a manejar. Una distancia máxima programable típica puede ser de 10 metros, esto es,  $10^6$  veces la unidad interna de resolución del sistema, que es de  $10\mu$ . Estos números tan elevados (seis-siete cifras decimales) deben ser manejados como números enteros, pues en otro caso habría una pérdida total de precisión, que deberá ser siempre  $\pm 1$  unidad. Por tanto, usando un microprocesador de 8 bits de longitud de palabra, habría que trabajar en triple precisión en algunos momentos, mientras que con un microprocesador de 16 bits de longitud de palabra bastaría hacerlo en doble precisión, con el consiguiente ahorro de tiempo de proceso.

Resumiendo, al enfrentarnos con el problema de diseñar un control numérico para máquinas-herramienta de tipo medio, incorporando microprocesadores, hemos visto, por lo anterior, que existen tres grandes áreas en que se puede dividir un control numérico, pudiéndose diseñar con bastante independencia una de las otras dos y sin que un replanteamiento de una de ellas, conlleve grandes cambios en las restantes -- (SA 76).

Dos de estas áreas, la referente a la edición de programas-pieza y la de funciones preparatorias y modificadoras, entendemos que no plantean grandes problemas a la hora del diseño, por tratarse de problemas suficientemente estudiados, y no van a ser objeto de nuestro trabajo.

Por el contrario, el diseño, con la inclusión de microprocesadores, del área de funciones críticas no está apenas tratado en la bibliografía. Dentro de ellas, van a ser atacados preferentemente los problemas relacionados con el lazo de posición y posteriormente, la generación de curvas. Los resultados de estos estudios darán lugar al diseño de lo que consideramos es el núcleo de un sistema de control numérico de tipo medio de máquinas-herramienta.



## C A P I T U L O    I I

### EL SISTEMA DE CONTROL DE POSICION

#### 2.1. INTRODUCCION

El problema de abordar el diseño de un control numérico de máquina-herramienta exige el conocimiento previo de las características dinámicas del sistema de control que supone la misma máquina, servomotores y lazos digitales de realimentación que puedan establecerse.

Existen abundantes publicaciones sobre el tema, pero ha parecido conveniente el realizar una síntesis del material existente realizando en algún caso desarrollos propios que dieran explícitamente algún parámetro característico del comportamiento dinámico del sistema, así como un estudio sobre posibles configuraciones a adoptar, analizando tanto sus características estáticas como dinámicas.

#### 2.2. EL SISTEMA ELECTROMECHANICO DE POSICIONADO

Dado que las máquinas-herramienta para operación en contorno son gobernadas en su mayoría por motores de corriente continua, se considerarán desde ahora este tipo de motores, pasando por alto los sistemas basados en motores paso a paso (generalmente usados en pequeños sistemas posicionadores) y de corriente alterna.

Para cada eje de la máquina supondremos un sistema similar, que vendrá impuesto, compuesto de un motor de corriente continua con el devanado inductor alimentado por una intensidad constante, con lo cual se puede decir que el par motor desarrollado es proporcional a la intensidad del inducido. Esta intensidad está gobernada por un rectificador controlado, o sistema análogo, empleando una cierta realimentación de corriente obtenida por la caída de tensión en una pequeña resistencia. A su vez, la referencia para este sistema de control de corriente la proporciona un sistema de control de velocidad, compuesto de una realimentación taquimétrica medida sobre el propio eje del motor, una referencia de velocidad externa, un controlador que realiza la diferencia de las dos señales anteriores y la afecta de una constante adecuada y, finalmente, una compensación por retardo-adelanto de fase con la finalidad de mejorar las características dinámicas del sistema. Todo ello proporciona la mencionada referencia de corriente, teniendo en definitiva un sistema de control de velocidad, con una entrada que es la referencia de velocidad suministrada y una salida que es la velocidad real del motor.

El estudio detallado de este sistema requiere el conocimiento de un número considerable de parámetros y también la consideración de características no lineales, tales como la respuesta del rectificador controlado que, naturalmente, presenta una saturación que limita el par desarrollado a un cierto valor máximo. Igualmente existe una limitación de velocidad en razón a que la fuerza electromotriz crece con la velocidad y llegaría a un valor tal que la tensión que proporciona el rectificador no podría hacer circular ninguna corriente.

No obstante lo expuesto resulta razonable utilizar como modelo del servosistema de velocidad un retardo de fase de una sola constante de tiempo, ya que las no lineales se pueden eliminar mediante la realimentación y la red de compensación se puede diseñar adecuadamente para dejar únicamente un polo dominante.

El sistema electromecánico de posicionado se completa con un sistema de engranajes que transmite el movimiento del árbol del motor a la máquina, lo que puede dar lugar a determinados efectos sobre el comportamiento dinámico del sistema, tales como la aparición de fenómenos de elasticidad en la transmisión, fricción seca y huelgos, que traen consigo las consecuencias que a continuación se exponen.

Los fenómenos de elasticidad producen alteraciones en la dinámica del sistema, introduciendo polos suplementarios; sus efectos son algo inestabilizantes, pero normalmente serán poco perceptibles, ya que las frecuencias son bastante más elevadas que el ancho de banda en lazo cerrado del sistema de control.

La fricción seca se manifiesta al pasar la velocidad por cero o al ser muy pequeña; se traduce en que la resistencia al movimiento en estas condiciones es superior a la existente cuando se ha alcanzado una cierta velocidad. Este fenómeno puede dar lugar a irregularidades en el movimiento si se programa una velocidad muy lenta y a imprecisión de posicionamiento en el caso de operación punto a punto.

Consiste el huelgo en el desenganche momentáneo entre el motor y la herramienta al cambiar de sentido la velocidad. Se combina usualmente con el efecto

de fricción seca, con lo que la herramienta puede estar parada mientras el motor se mueve, teniendo lugar después un choque, produciéndose una acumulación de efectos que influyen negativamente sobre un correcto posicionado. También puede producirse si se produce una deceleración excesiva en el motor; este reduce su velocidad mientras los engranajes prosiguen a velocidad más elevada hasta que tiene lugar el choque correspondiente.

Todos estos fenómenos son causa de imprecisión y, si bien existen procedimientos para tenerlos en cuenta, su compensación es un problema más bien de mecanizado y lubricación que de control.

Finalmente, existe un sistema de medida de la posición de la herramienta, que será absoluto o relativo, pero en todo caso será digital. Esta cuantización en la medida del desplazamiento puede ser también otra causa de imprecisión en el posicionado, pudiendo darse el caso de que la máquina oscile en  $\pm 1$  cuenta alrededor de una posición fija si no se toman las debidas precauciones.

Resumiendo, se tendrá, por parte del control numérico y para cada eje de la máquina-herramienta, una entrada accesible al sistema electromecánico, que es la referencia de velocidad y una salida que es la medida digital de la posición. Con ésta y un cálculo numérico se ha de generar aquella.

### 2.3. SISTEMA DE CONTROL PARA OPERACION PUNTO A PUNTO

Una vez descritas las características que vienen impuestas por la propia estructura de la máquina-herramienta, veamos que sucesión de referencias es conveniente aplicar a ésta y como ligarla con la salida digital de posición a fin de que el posicionado sea correcto.

Por los efectos mecánicos vistos anteriormente es esencial que no se sobrepase la posición a la que se desea llevar la herramienta, pues el tener que efectuar un pequeño retroceso pondría en juego los huelgos y la fricción seca, siendo difícil de controlar el movimiento en estos casos.

El ideal será, pues, que en el momento en que se detecte el paso por la posición deseada la referencia de velocidad aplicada sea cero y el sistema se detenga antes de alcanzar la siguiente señal de posición, ya que en este caso la señal de error sería negativa y, o bien no se tiene en cuenta y el sistema continúa en marcha alejándose de la cota deseada, o se invierte la referencia de velocidad, lo que se ha visto que no es aconsejable.

Si la constante de tiempo del lazo de velocidad es  $\tau$ ,  $V_1$  la velocidad con que el sistema llega al punto de consigna y despreciando cualquier otro efecto, se tiene que a partir del momento en que se impone la consigna  $V=0$ , la velocidad sigue la ley:

$$V = V_1 e^{-\frac{t}{\tau}}$$

y el espacio recorrido (si no cambia la consigna) será:

$$x = V_1 \int_0^{\infty} e^{-\frac{t}{\tau}} dt = \tau V_1$$

Siendo  $\epsilon$  la separación entre marcas en el detector de posición,  $V_1 = \epsilon/\tau$  asegurará que la máquina se detiene con un error inferior a una cuenta. Este valor de  $V_1$  podrá ser algo mayor en la práctica debido a la existencia de la fricción seca. No es conveniente que sea menor porque sería difícilmente controlable si se impone con anterioridad.

La aceleración del sistema, al hacer referencia de velocidad del sistema, igual a cero con una velocidad  $V_1$ , es  $-V_1/\tau$ ; esta deceleración no crea normalmente problema de huelgos por ser  $V_1$  pequeña.

La evolución entre dos señales de posición en deceleración, siendo  $\epsilon$  la separación entre marcas,  $V_1$  la velocidad al comienzo,  $V_2$  la velocidad final ( $V_r < V_2 < V_1$ ), viene dada por:

$$\epsilon = \tau(V_1 - V_2) + \tau V_r \ln \left( \frac{V_1 - V_r}{V_2 - V_r} \right)$$

y la deceleración al comienzo  $\dot{V} = -(V_1 - V_r)/\tau$

Estas expresiones permitirán, procediendo de adelante hacia atrás, calcular la sucesión de consignas admisibles para posicionar con precisión y a la máxima velocidad, pero el cálculo exacto es demasiado complicado, teniendo en cuenta las exigencias en tiempo del sistema, pareciendo suficiente el programar una referencia de velocidad, que de un modo rápido, y sin sobrepasar los límites de deceleración, lleve a una velocidad

próxima a la expresada con anterioridad para detención en una cuenta y programar entonces unas cuantas referencias de velocidad correspondientes a las señales digitales que faltan para llegar a cero. Aún esto puede requerir una potencia de cálculo y una preparación y conocimiento de las características de la máquina-herramienta concreta a controlar muy elaborados. En general una referencia de velocidad lineal con el error puede ser suficiente.

Una forma sencilla de generar esta referencia de velocidad es utilizar un acumulador, en el que se tiene la totalidad del desplazamiento a efectuar y que se vaya descontando al mismo tiempo la salida digital del captador de posición recorrida. Habrá una velocidad máxima alcanzada, propia de la saturación del lazo de control y la limitación de entrada que da una referencia de velocidad máxima. Cuando el contenido del acumulador, que sin efectos de saturación es igual al error de posición, produce la referencia de velocidad máxima, comienza una deceleración siendo la referencia de velocidad lineal con el error, con una constante de proporcionalidad dada por la relación: número contenido en el acumulador/referencia de velocidad.

Cerrado así el lazo de posición, puede analizarse, lo que se hará más adelante, incluyendo el hecho de que sea un sistema muestreado y con retardos, pudiéndose entonces ajustar la constante de conversión que juega el papel de ganancia en lazo abierto, con el fin de obtener el factor de amortiguamiento requerido. No hay cambios sustanciales si el acumulador se carga mediante una secuencia de frecuencia fija, lo que equivale a una

referencia de velocidad variable con el tiempo, según una rampa , siendo la respuesta a la misma, tras un transitorio, una rampa retrasada en el tiempo y de igual pendiente.

Si la velocidad de entrada excede a la saturación de velocidad propia del sistema se llegará a una velocidad máxima y cuando terminen de llegar todos los impulsos correspondientes al desplazamiento total se estará en el caso anterior, con el acumulador con una cierta carga y una velocidad inicial, produciéndose el fenómeno descrito cuando por la disminución del contenido del acumulador empieza a disminuir la referencia de velocidad.

#### 2.4. SISTEMA DE CONTROL PARA OPERACION EN CONTORNEO

En el apartado anterior no se ha hecho referencia a más de un eje porque lo que interesa es la posición final alcanzada por la herramienta, sin importar la trayectoria recorrida y sin interesar por tanto la coordinación de movimientos entre los distintos ejes.

Un planteamiento totalmente diferente es el que ha de realizarse cuando la operación a ejecutar es de contorno. En este caso es de primordial interés que la relación de movimientos de dos o más ejes sea la prevista y hasta cierto punto que la velocidad lineal de desplazamiento sea una dada.

Así como en el caso de operación punto a punto es recomendable considerar la máquina como un sistema al que se le proporcionan referencias de velocidad



generadas a partir de las señales de error, aquí es más conveniente cerrar el lazo de posición previamente y ocuparse únicamente de generar referencias de posición variables con el tiempo, que se aplicarán simultáneamente a cada eje.

La operación de cerrar el lazo de posición se puede efectuar del mismo modo que se ha descrito en 2.3, es decir, mediante un acumulador al que llegan pulsos a un determinado ritmo que producen incrementos en el acumulador, lo que es totalmente equivalente a una señal continua en forma de escalones aplicada a una entrada de referencia de posición; la salida del detector de posición, tratada de igual modo, cierra el lazo decrementando el acumulador.

Dado que nuestro interés se centra en los sistemas para operación en contorno en los que el microprocesador sea parte importante del lazo de control, pasamos a ocuparnos con más detalle de las posibles configuraciones y sus peculiaridades en los siguientes apartados.

#### 2.4.1. Posibles configuraciones del sistema

Dentro de los sistemas de CN para contorno, parece clara la distinción a establecer entre los implementados con lógica cableada exclusivamente y aquellos en los que el microprocesador forma parte del lazo de control.

En efecto, los primeros tienen un ciclo de trabajo mucho más breve dada la alta velocidad de operación de los componentes electrónicos comportándose los sistemas como casi continuos frente a los del segundo tipo, que al tener que ejecutar un programa para realizar el control, y por pocas instrucciones que aquel tenga, se comportan claramente como sistemas muestreados.

Se van a presentar distintas alternativas de servomecanismos de control de posición, analizando en primer lugar sus ventajas e inconvenientes tanto desde el punto de vista de su implementación electrónica como del de la programación del sistema, considerando en todas ellas que la labor de interpolación para la generación de curvas, en la manera que lo aborda el tercer capítulo de esta memoria, la realiza el computador junto con las demás tareas del sistema.

En una segunda etapa se estudiará el comportamiento dinámico de cada una de las configuraciones desde el punto de vista de la teoría del control. Finalmente se investigará los errores de perfil en contorno durante los procesos de interpolación más usuales.

Una primera configuración es la que aparece en la figura 2.1, en la que se muestra el esquema para un único eje. Los demás ejes del sistema tendrían una configuración análoga a la mostrada ya que las funciones que se realizan han de repetirse sucesivamente para cada eje de la máquina.

El computador genera los trenes de impulsos que van a incrementar el contenido del registro de seguimiento, en donde está en todo momento almacenado el error de posición. En realidad, y según el sentido del desplazamiento a efectuar, pueden incrementar o decrementar ese acumulador, teniendo los trenes generados por el captador de posición la función complementaria a esta entrada, decrementar o incrementar, según el sentido; a partir de ahora, y por simplificación en la exposición

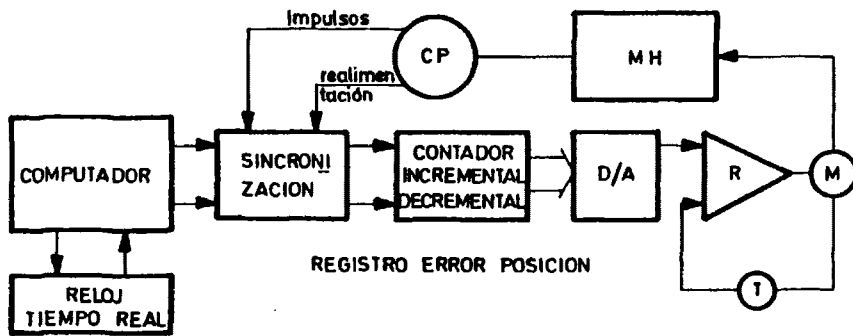


Fig. 2.1 CONFIGURACION CNC1

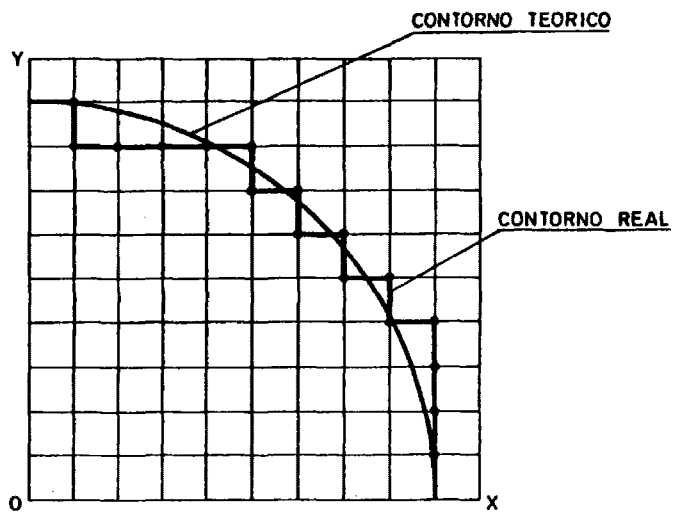


Fig. 2.2 DESPLAZAMIENTO CONSTANTE

supondremos que el tren generado por el computador incrementa mientras que el generado por el captador de posición decrementa el registro de seguimiento, esto es, supondremos un desplazamiento positivo a lo largo del eje, salvo que se indique lo contrario.

Los impulsos generados por el computador no tienen por qué provenir de una única fuente, pues en el caso de posicionado, que se suele hacer a máxima velocidad, pueden llegar de una fuente externa y el computador sólo deberá contarlos, mientras que en contorno el computador ha de discernir el tren que ha de enviar a cada eje.

El lazo de control de posición se cierra con la realimentación debida al captador de posición que se supone del tipo incremental y digital; en caso de usarse otro tipo de captador, como pueden ser los de tipo analógico (Resolver o Inductosyn) las interfases deberán modificarse.

Tanto los impulsos de entrada como los de realimentación pasan a través de un circuito de sincronización, que tiene por objeto eliminar las posibles coincidencias entre impulsos de ambos trenes. El convertidor digital-analógico (D/A) convierte la salida del registro de seguimiento en una tensión de mando analógica que se aplica al regulador de velocidad.

Aunque debido a la cuantificación de la posición de referencia y de la realimentación de posición todas las señales internas son discretas, la realidad es que el sistema no funciona como sistema muestreado, no estando implicada, por tanto, una frecuencia de muestreo. El sistema se comporta aproximadamente como un sistema continuo, no apareciendo ningún tipo de degradación.

El error de posición en régimen estacionario será en este caso:

$$e_R = \frac{V}{K}$$

siendo V la velocidad de avance y K la ganancia del lazo de posición.

Las técnicas de interpolación usadas para generación de perfiles con esta configuración, habrán de ser del tipo desplazamiento constante, es decir, que cada impulso del tren debe ser generado en instantes de tiempo precisos, siendo cada uno de estos impulsos equivalente a un desplazamiento fijo, que es la resolución del sistema. En la figura 2.2 se puede ver un cuadrante de circunferencia generado con una técnica de desplazamiento constante.

Las principales ventajas de esta configuración CNC1 son:

- El sistema funciona como sistema casi continuo y por tanto si los ejes tienen una misma constante de tiempo, sus errores de seguimiento, como se verá más adelante, prácticamente se cancelan, dando lugar a un error de perfil nulo, especialmente en la generación de rectas, si bien en la práctica aparece un error cíclico.
- El registro de seguimiento debe ser de tamaño medio (10-12 bits), dado que contiene directamente el error de posición y ya se ha visto en el primer capítulo el orden de magnitud de las cantidades con que se ha de trabajar.
- No se producen retardos debidos a tratamientos efectuados por el computador, al no cerrar éste el lazo de control, eliminándose por tanto otra causa posible de degradación en la respuesta dinámica del sistema.

- Debido a que el proceso de interpolación es continuo, se generan contornos de gran precisión.

Los principales inconvenientes de esta configuración son:

- Necesidad de utilizar un contador incremental/decremental y un circuito de sincronización externos.
- Una mayor dificultad para la realización de modificaciones, por parte del computador, en las características, y por tanto, en el comportamiento del lazo como, por ejemplo: programación de la ganancia del lazo, monitorización de la verdadera posición, pruebas de precisión y el chequeo del comportamiento del servosistema

Esto es debido, naturalmente, a que el computador no forma parte del lazo de control.

- El ciclo de trabajo del computador aumenta proporcionalmente a la velocidad de avance, existiendo un límite en la máxima velocidad a que puede realizarse la generación de trenes de impulsos por el programa interpolador que corre sobre el computador.
- Estos programas para la realización de la interpolación y del control en tiempo real son más complicados y por tanto ocupan más memoria.

Veamos ahora una segunda configuración, que llamaremos CNC2 y cuyo esquema se muestra en la figura 2.3, y en la que ya el computador cierra el lazo de control, con lo que el sistema pasa a ser un sistema muestreado con una frecuencia de muestreo constante.

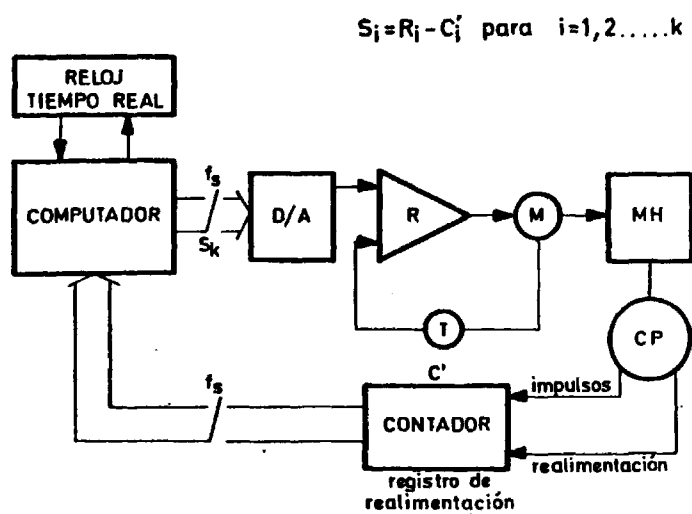


Fig. 2.3 CONFIGURACION CNC2

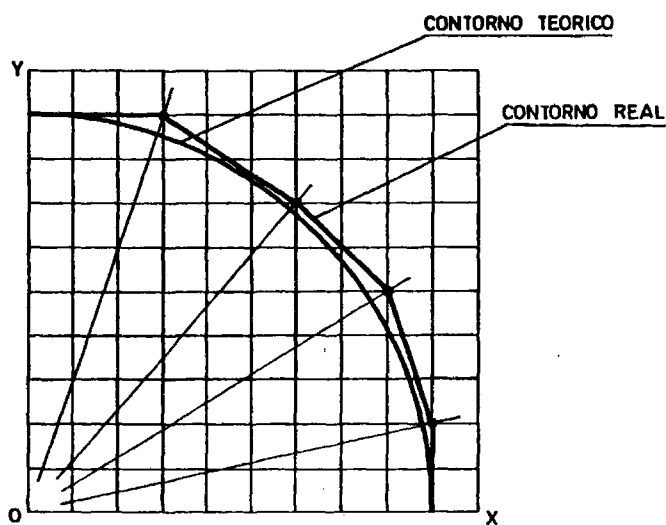


Fig.2.4 INTERVALO DE TIEMPO CONSTANTE

En este caso, y a intervalos de tiempo constantes, el computador realiza las siguientes funciones:

- Genera el nuevo valor de referencia para cada eje, por medio del programa interpolador. Un registro de referencia  $R$ , interior al computador, acumula los impulsos que, en ciertos instantes del intervalo de muestreo, suministra aquel.
- Muestrea el contador  $C'$  que hace de registro de realimentación. Su contenido indica en cada instante de muestreo la verdadera posición.
- Calcula el error de posición  $S$ , lo manipula utilizando diversos criterios (como puede ser la modificación de la ganancia del lazo  $k_p$ ) y lo transmite al convertidor D/A; la salida de éste atacará al regulador de velocidad.

Para esta configuración CNC2 puede ser también necesaria la inclusión de un circuito de sincronización para evitar la coincidencia de la lectura del registro  $C'$  y de los impulsos de realimentación de la posición.

El error de posición valdrá:

$$S_i = R_i - C'_i \quad \text{para } i=1,2,\dots,k$$

donde esta diferencia  $S_i$  sería en realidad una suma algebraica que dependería del sentido del desplazamiento y que se actualizaría en cada instante de muestreo; la salida cambiaría, por tanto, exclusivamente en cada instante de muestreo.

Al ser este sistema de control del tipo muestreado la respuesta dinámica del sistema puede resultar degradada especialmente si no se usan frecuencias de muestreo superiores al menos a siete veces la anchura de



banda del sistema, si bien este tema está tratado con más amplitud en otro punto de esta memoria.

Aumentando la frecuencia de muestreo, la respuesta de este sistema CNC2 se aproxima a la del sistema CNC1. Sin embargo, al aumentarla se incrementa proporcionalmente el tiempo de trabajo del computador, ya que el tiempo de cálculo es aproximadamente el mismo, independientemente de la frecuencia de muestreo, por lo que existirá un límite superior para aquella, por exigencias del tiempo de ejecución del programa.

Para este sistema CNC2 las técnicas de interpolación pueden ser del tipo intervalo de tiempo constante, es decir, que la nueva posición para cada eje no se calcula en cada desplazamiento elemental, sino a intervalos de tiempo precisos y constantes. Por tanto, cuando la velocidad de avance es elevada, la generación de contornos se realiza con mucha menos precisión, especialmente si la frecuencia de muestreo no es suficientemente elevada (vease figura 2.4).

Señalamos a continuación las principales ventajas de esta configuración CNC2:

- Posibilidad de que el computador actúe fácilmente en el comportamiento del lazo de control de posición.
- El computador puede realizar funciones tales como el chequeo, pruebas de precisión, etc.
- El proceso de interpolación es menos crítico en el tiempo.
- El ciclo de trabajo del computador es constante y, por tanto, la organización de la programación es más simple precisando menos memoria.

- Esta configuración, con sistemas inteligentes potentes, permite el control simultáneo de varias máquinas herramienta.

Los principales inconvenientes de esta configuración son los siguientes:

- Es un ejemplo típico de control muestreado, por lo que pueden aparecer degradaciones en la respuesta del sistema.
- Los registros R y C' son de gran capacidad, debiéndose realizar las operaciones con ellos en múltiple precisión.
- Se pueden producir mayores errores de perfil en contorno.
- Aparecen retardos debidos al procesamiento adicional que realiza el computador al calcular las nuevas referencias.

El primer inconveniente se puede obviar utilizando frecuencias de muestreo que sean del orden de siete u ocho veces la anchura de banda del sistema. Como un sistema de este tipo tiene como mucho una anchura de banda del orden de 15 Hz, utilizándose frecuencias de muestreo de 100 Hz la respuesta del sistema no resultará apenas degradada, lo que se verá posteriormente con mayor detalle.

Finalmente diremos que esta configuración presenta la gran ventaja sobre la CNC1 de que el computador, por programa, puede actuar sobre el lazo en aspectos tales como programación de la ganancia del lazo, incluso con ganancias diferentes para cada eje de la máquina-herramienta, pruebas de precisión, diagnóstico de fallos en el servomecanismo, etc.

Una modificación del sistema CNC2 es la configuración CNC3 (figura 2.5), que elimina varios de los inconvenientes antes apuntados y cuyo funcionamiento se pasa a describir.

Dado que la salida del computador en el instante de muestreo k-ésimo es:

$$S_K = R_K - C'_K = \sum_{i=1}^K R_i - \sum_{i=1}^K C'_i = \sum_{i=1}^K (\Delta R_i - \Delta C'_i)$$

donde  $\Delta R_i$  y  $\Delta C'_i$  son los incrementos de R y C' entre el instante de muestreo i-1 y el i, podemos expresar el valor de  $S_K$  de la forma:

$$S_K = \sum_{i=1}^K (R_{oi} - C'_{oi})$$

donde  $R_{oi}$  y  $C'_{oi}$  son los contenidos de sendos registros  $R_o$  y  $C'_o$  análogos a los R y C', pero únicamente acumulan hasta los valores de  $\Delta R_i$  y  $\Delta C'_i$  por puesta a cero al comienzo del intervalo, tras la lectura de su contenido por el computador.

Por tanto, con esta disposición, los registros  $R_o$  y  $C'_o$  pueden ser de pequeña capacidad, incluso de sólo 8 bits. El registro  $R_o$  puede ser interno al computador, incrementándose por programa cada vez que el interpolador genera una nueva posición para cada uno de los ejes.

La forma de operación sería entonces la siguiente:

En cada instante de muestreo el computador explora el registro  $R_o$ , obteniendo el valor  $R_{ok}$  y poniendo seguidamente a cero el registro  $R_o$ . A continuación explora el registro  $C'_o$  obteniendo  $C'_{ok}$  y poniendo también a cero el registro  $C'_o$ . Acto seguido el computador calcula la diferencia de ambos valores .../...

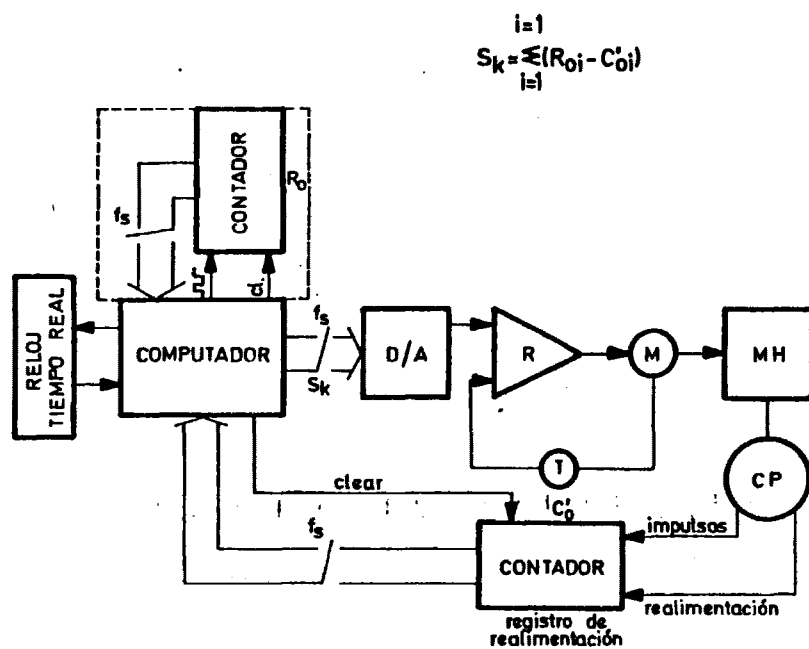


Fig.2.5 CONFIGURACION CNC3

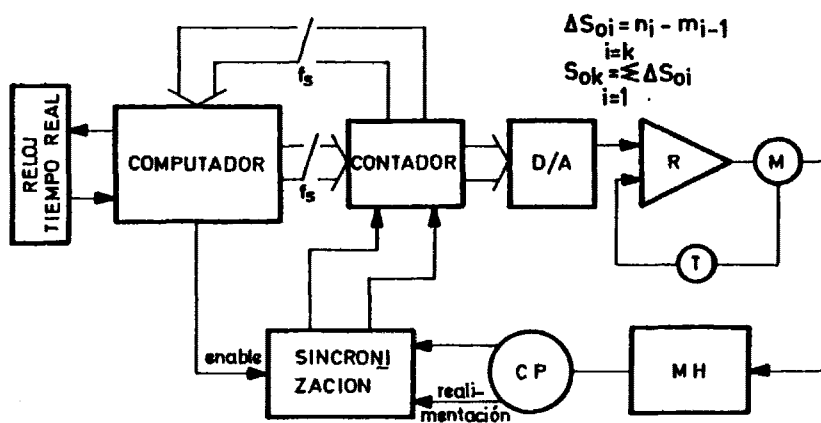


Fig.2.6 CONFIGURACION CNC4

acumulando las diferencias encontradas en cada instante de muestreo en otro registro interno y atacando, previa una posible manipulación para corregir el comportamiento del lazo, con el valor de ese registro la entrada del convertidor D/A. La principal ventaja de esta configuración es que al introducirse una sumatoria se evita el tratar con registros de gran capacidad y operaciones en precisión múltiple, con el consiguiente ahorro de tiempo de proceso.

Se considera por fin una cuarta configuración CNC<sup>4</sup>, que se muestra en la figura 2.6, como una modificación de la CNC<sup>1</sup> en la que el computador monitoriza y posteriormente actualiza el registro de seguimiento a intervalos de tiempo constantes. En este caso, el registro de seguimiento realiza una doble función ya que por una parte cierra el lazo de control cumpliendo el papel de registro de realimentación y por otra actualiza el servomecanismo, sirviendo por tanto de registro de error de seguimiento.

El computador realiza, para cada eje y en cada instante de muestreo, la secuencia de operaciones que sigue:

- Genera la nueva posición de referencia para el siguiente instante de muestreo.
- Cuando se alcanza éste, se inhibe el contador; cualquier impulso que llega cuando el circuito de sincronización está inhibido, es almacenado y posteriormente permitido al final de la secuencia.
- Se lee el contador de posición calculándose la posición verdadera mediante la fórmula:

$$S_{oi} = n_i - m_{i-1}, \quad S_{ok} = \sum_{i=1}^K S_{oi}$$

donde  $S_{oi}$  es el cambio de posición entre los instantes de muestreo  $(i-1)$ -ésimo e  $i$ -ésimo,  $m_{i-1}$  es el estado del contador de posición tras su actualización ulterior al instante de muestreo  $(i-1)$ -ésimo,  $n_i$  es el estado del contador en el instante de muestreo  $i$ -ésimo, y  $S_{ok}$  es la salida del computador en el instante de muestreo  $k$ -ésimo.

- Tras este cálculo, se hace el del error de posición y la señal de mando.
- Se carga esta señal en el contador de posición, liberándose a continuación el contador (circuito de sincronización).
- Esta señal se transmite al regulador de velocidad a través del convertidor D/A.

A fin de que la respuesta del sistema sea aceptable es imprescindible que el retardo producido por todas estas operaciones sea el menor posible, lo cual exige una unidad de cálculo relativamente rápida.

Aunque el computador realiza sus operaciones de cálculo y control a intervalos de tiempo constantes, este sistema de control en cuanto a su comportamiento dinámico se puede considerar no muestreado y en cierta forma análogo al comportamiento del sistema CNC1.

En este caso, por tanto, la respuesta dinámica del sistema no viene afectada por el valor de la frecuencia de muestreo. Sin embargo la frecuencia de muestreo sí afecta a la precisión en la generación de contornos, por lo que debe utilizarse un valor adecuado de dicha frecuencia. El principal inconveniente de esta configuración, reside en el hecho de que necesita un circuito externo de sincronización más complejo.

#### 2.4.2. Comportamiento dinámico de las distintas configuraciones.

Según lo visto en el apartado anterior, existen básicamente dos alternativas de sistemas de control de posición con computador. En la primera, el computador aunque formando parte del control, no cierra el lazo. En este caso, el lazo de control se cierra a través de un circuito electrónico diferente según los casos. Esta alternativa (configuraciones CNC1 y CNC4) tiene un comportamiento que se puede denominar continuo o mejor aún, casi continuo, dada la existencia de cuantificaciones tanto en la posición de referencia como en la de realimentación de la posición.

En la segunda alternativa (configuraciones CNC2 y CNC3) el lazo de control se cierra a través del computador, actuando el mismo sobre el sistema con una frecuencia  $f_s$ , luego se ha de considerar como un sistema de control muestreado con un periodo de muestreo  $T=1/f_s$ .

El análisis matemático del comportamiento de ambas alternativas se va a realizar utilizando como base la segunda alternativa, de control muestreado, aplicando posteriormente estos mismos resultados a las configuraciones CNC1 y CNC4 imponiendo la condición de que  $T \rightarrow 0$ . Según esto, sea CNC2 (figura 2.3) el diagrama de bloques de la configuración base, en la que se sigue suponiendo que el captador de posición es del tipo incremental-digital. Este sistema es un control en tiempo real en el cual un contador que cierra el lazo de realimentación es muestreado por el computador a intervalos de tiempo fijos que son iguales al periodo de muestreo  $T$ .

Esta información es procesada junto con la que viene del interpolador y el resultado lo utiliza el computador para actualizar a través del convertidor D/A el correspondiente regulador de velocidad del motor. La señal

de referencia de velocidad será, pues, y debido al muestreo, una señal en escalera (con escalones de velocidad constante) con un periodo  $T$ .

El diagrama de bloques del lazo de control aparece en la figura 2.7. Como puede observarse, se ha introducido un circuito retenedor de orden cero (ZOH) debido al registro de salida muestreado del computador y el convertidor D/A. El contador asociado con el captador de posición no aparece en el diagrama de bloques, dado que no afecta al comportamiento del sistema.

Asimismo, y aunque existen en realidad dos muestreadores, uno de entrada y otro de salida, su localización en el lazo requiere que uno solo de ellos sea considerado.

La función de transferencia del lazo de velocidad asume el modelo simplificado, con un único polo dominante  $\tau$ , debido a la constante de tiempo mecánica del motor.

En el diagrama figura también la función de transferencia del ZOH,  $(1-e^{-Ts})/s$ , donde  $T$  es el periodo de muestreo, así como un integrador ( $1/s$ ).

La ganancia en lazo abierto del sistema es:

$$K = K_c K_e K_m$$

donde  $K_c$  incluye las ganancias del convertidor D/A en voltios/impulsos y del amplificador de potencia.

$K_e$  es la ganancia del captador de posición en impulsos/ $\mu$

$K_m$  es la ganancia del sistema regulador de velocidad en  $\frac{\mu/\text{seg}}{\text{voltios}}$ .

Definido así el sistema objeto de estudio, pasemos a considerar su estabilidad y su tiempo de respuesta, aplicando los resultados a las demás configuraciones presentadas en 2.4.1.



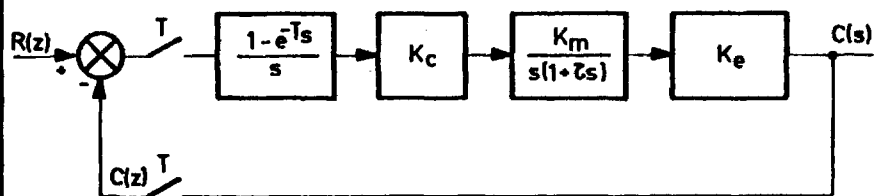


Fig. 2.7

#### 2.4.2.1. Análisis de estabilidad

La función de transferencia en lazo abierto del sistema es:

$$G(s) = \frac{1-e^{-sT}}{s} \cdot \frac{K}{s(1+s\tau)}$$

Haciendo una descomposición en fracciones simples:

$$G(s) = K(1-e^{-sT}) \left( \frac{1}{s} - \frac{\tau}{s} + \frac{\tau}{s+\frac{1}{\tau}} \right)$$

que se puede transformar con el cambio de variable  $z=e^{sT}$  (transformada  $z$ ), consultando las tablas de transformación, en la función  $G(z)$ , de valor:

$$G(z) = K \left( \frac{z-1}{z} \right) \left( \frac{Tz}{(z-1)^2} - \frac{\tau z}{z-1} + \frac{\tau z}{z-e^{-T/\tau}} \right)$$

Llamando, por simplificar,  $E = e^{-T/\tau}$  y operando:

$$G(z) = K \frac{(z-E)[T-\tau(z-1)] + \tau(z-1)^2}{(z-1)(z-E)}$$

Para realizar un análisis de estabilidad, se estudiará el polinomio numerador de  $1+G(z)$ , que se denominará  $P(z)$ :

$$P(z) = z^2 + z \{K [T-\tau(1-E)] - (1+E)\} + K [\tau(1-E)-TE] + E$$

El sistema en lazo cerrado es estable si  $P(z)$  no posee ceros fuera del círculo unidad en el plano  $z$ . La determinación de esta condición es bastante complicada en general pero dado que la expresión de  $P(z)$  es cuadrática y con coeficientes reales, las condiciones necesarias y suficientes para que se verifique aquello, son:

$$|P(0)| < 1, \quad P(1) > 0, \quad P(-1) > 0$$

Estas tres condiciones conducen a las desigualdades siguientes:

$$\begin{aligned} K [\tau - E (T + \tau)] + E &< 1 \\ KT (1 - E) &> 0 \\ 2 + 2E + K [2\tau(1 - E) - T(1 + E)] &> 0 \end{aligned}$$

La segunda desigualdad se satisface para cualquier  $K$  positiva, pero la primera y tercera introducen un límite al valor de la ganancia  $K$ . Reorganizando esas dos desigualdades tenemos:

$$K \tau < \frac{1 - E}{1 - E - (T/\tau) E} \quad (1)$$

$$K \tau < \frac{2(1 + E)}{(T/\tau)(1 + E) - 2(1 - E)} \quad (2)$$

Para un sistema continuo, al tender  $T$  a cero, se tiene:

$$1 - e^{-T/\tau} \rightarrow T/\tau, \quad e^{-T/\tau} = 1$$

con lo que las condiciones (1) y (2) se verifican siempre, independientemente del valor de la ganancia en lazo abierto  $K$ .

Por tanto, una primera consecuencia de gran importancia es que las configuraciones CNC1 y CNC4, presentadas en 2.4.1. son siempre estables, mientras que las configuraciones CNC2 y CNC3 son estables para un rango de valores de  $K$ , existiendo un límite superior para la misma.

Los límites marcados por (1) y (2) tienen un punto de intersección en:

$$\frac{T}{\tau} = \frac{4(1 - E)}{1 + E}$$

Recordando que  $E = e^{-T/\tau}$ , se obtiene como valor del punto de intersección  $T/\tau = 3.830$ .

Por tanto, mientras  $T/\tau$  verifique  $0 < T/\tau < 3.83$  la frontera de estabilidad de los sistemas CNC2 y CNC3 viene dada por la desigualdad (1).

#### 2.4.3 Criterios de optimización. Tiempo de respuesta

Una vez analizado el problema de la estabilidad de las cuatro configuraciones propuestas como posibles para el sistema de control en contorno en 2.4.1, hemos de hacer notar que el grado de estabilidad no es la única condición que debe imponerse a un sistema de control. No se deben olvidar otras características del mismo, tales como precisión, error de seguimiento, rebasamiento (overshoot), etc.

Se pueden seguir diversos criterios para optimizar el comportamiento dinámico del servosistema. Unos están basados en el factor de amortiguamiento, otros en el rebase máximo, consecuencia de una entrada en escalón de velocidad, otros en la integral del error cuadrático de la velocidad, otros en el error de seguimiento en estado estacionario, etc.

Koren y Bollinger en (K078) han comprobado que el criterio que parece más adecuado para el diseño óptimo del servomecanismo de control de posición para máquinas-herramienta es el basado en la minimización de la integral del valor absoluto del error. Estos errores tienen su máximo justamente después de aplicar la función escalón. Este error  $e(t)$  será cero en los instantes de cruce  $t_n$ .

La integral del valor absoluto del error I será:

$$I = \int_0^{\infty} |e(t)| dt = \int_0^{t_1} e(t) dt - \int_{t_1}^{t_2} e(t) dt + \int_{t_2}^{t_3} e(t) dt - \dots$$

Definiendo:

$$\int_{t_{n-1}}^{t_n} e(t) dt = E(t_n) - E(t_{n-1}) \quad \text{resulta:}$$

$$I = -E(0) + 2 \{ E(t_1) - E(t_2) + E(t_3) - \dots \}$$

Para calcular I vamos a integrar previamente la función  $e(t)$ , error de velocidad a un salto unidad.

Siguiendo a (K078), la respuesta del sistema a un escalón de velocidad es:

$$C_n = 1 - e^{-\alpha n T} (\cos \omega n T + M \sin \omega n T)$$

donde:

$$e^{-\alpha n T} = a^n$$

Para calcular la integral del valor absoluto del error, vamos a usar la respuesta de un sistema continuo a un salto unidad:

$$c(t) = 1 - e^{-\alpha t} (\cos \omega t + M \sin \omega t)$$

El correspondiente error  $e(t)$  será:

$$e(t) = e^{-\alpha t} (\cos \omega t + M \sin \omega t) \quad (3)$$

donde:

$$\alpha = -\frac{1}{T} \ln(a) = \frac{1}{2T} - \frac{1}{2T} \ln(1 - KT + K\tau \frac{1-E}{E})$$

El valor de  $\omega$  viene determinado por:

$$\omega = \omega_0 + (n\pi)/T$$

donde:

$$\omega_0 = \frac{1}{T} \operatorname{tg}^{-1} \frac{\sqrt{4KT - (1-D)^2}}{\frac{1+E}{1-E} - D}$$

siendo:

$$D = \frac{K(T-\tau(1-E))}{1-E}$$

y

$$\begin{aligned} n=0 & \quad \text{para } 0 \leq \omega_0 T < \pi/2 \\ n=1 & \quad \text{para } \frac{\pi}{2} \leq \omega_0 T < \frac{3\pi}{2} \end{aligned}$$

Asimismo el valor de M será:

$$M = \frac{1-D}{\pm \sqrt{4K\tau - (1-D)^2}}$$

Este error  $e(t)$  será tomado para la aplicación del criterio de minimización de la integral del valor absoluto del error I. El error  $e(t)$  será nulo en los instantes  $t_n$ , donde  $t_n$  es el instante de cruce.

Integrando la ecuación (3) obtenemos el valor de  $E(t_n)$ :

$$E(t_n) = E_n = F_n e^{-\alpha t_n} \quad (4)$$

donde:

$$F_n = \frac{1}{\alpha^2 + \omega^2} \{ (\omega - M\alpha) \sin \omega t_n - (\alpha + M\omega) \cos \omega t_n \}$$

Los valores de  $t_n$  se pueden obtener haciendo cero  $e(t)$  en (3):

$$\omega t_n = \tan^{-1} \left( -\frac{1}{M} \right) + n\pi, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Para calcular la relación entre  $F_n$  y  $F_{n-1}$ , de esta última expresión se obtiene:

$$\begin{aligned} \sin \omega t_n &= -\sin \omega t_{n-1} \\ \cos \omega t_n &= -\cos \omega t_{n-1} \end{aligned} \quad (6)$$

Observando (4) y (6), se obtiene la relación:

$$F_n = -F_{n-1} \quad (7)$$

Sustituyendo (4) en la expresión de I y usando (7), se llega a:

$$I = -E_0 + 2F_1 \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\alpha t_n}$$

De acuerdo con (5):

$$\alpha t_n = \alpha t_{n-1} + \frac{\alpha \pi}{\omega}$$

Haciendo uso de la expresión de la suma de los términos de una progresión geométrica:

$$I = -E_0 + \frac{2F_1 e^{-\alpha t_1}}{1 - e^{-\frac{\alpha \pi}{\omega}}} \quad (8)$$

Las funciones trigonométricas que se requieren para el cálculo de  $F_1$  se obtienen de (5):

$$\text{sen } \omega t_1 = \frac{1}{\sqrt{1+M^2}}$$

$$\cos \omega t_1 = \frac{-M}{\sqrt{1+M^2}}$$

Usando estas expresiones, se puede obtener como valor de  $F_1$  proporcional al rebasamiento máximo:

$$F_1 = \frac{\omega \sqrt{1+M^2}}{\alpha^2 + M^2}$$

En cuanto a  $E_0$ , error de posición en régimen estacionario, es igual a  $F_0$  y se puede obtener haciendo  $t=0$  en (4):

$$F_0 = E_0 = -\frac{\alpha + M\omega}{\alpha^2 + \omega^2}$$

En cuanto a  $t_1$ , se puede obtener a partir de (5):

$$t_1 = \frac{1}{\omega} \text{tg}^{-1} \left( -\frac{1}{M} \right) + \frac{\pi}{\omega}$$

con lo que queda definido el valor de  $I$ , integral del valor absoluto del error. Para el caso de un sistema continuo (configuraciones CNC1 y CNC4 de 2.4.1.):

$$I = \frac{2}{\omega_n} \left\{ \xi + \frac{e^{-M\sigma}}{1 - e^{-M\pi}} \right\}$$

con:

$$\sigma = \text{tg}^{-1} \left( -\frac{1}{M} \right) + \pi \quad \text{y} \quad M = \frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}$$

Koren y Bollinger han calculado (K078), el valor de  $\xi$  (factor de amortiguamiento) que hace mínimo  $I_{\omega_n}$

Este valor es:

$$(I_{\omega_n})_{\min} = 1,605 \quad \text{para } \xi = 0,662$$

Observe que dado que  $E_0$  es el error de posición en régimen estacionario y que  $F_1$  es proporcional al rebasamiento máximo, al minimizar  $I$  en (8) se tendrán en cuenta los dos requerimientos contrapuestos en todo servomecanismo, es decir, pequeño rebasamiento por una parte y mínimo error de posición por otra.

Dado que:

$$\alpha = \frac{\xi \omega}{\sqrt{1 - \xi^2}} \quad \text{se deduce:}$$

$$\xi = \frac{\alpha T}{\sqrt{(\alpha T)^2 + (\omega T)^2}} \quad (9)$$

siendo:

$$\alpha = \frac{1}{2\tau} - \frac{1}{2T} \ln \left( 1 - KT + K\tau \frac{1-E}{E} \right)$$

$$\omega = \frac{1}{T} \operatorname{tg}^{-1} \frac{\{ 4\pi\tau - (1 - \frac{K(T-\tau(1-E))}{1-E})^2 \}^{1/2}}{1+E - K \{ T-\tau (1-e^{-T/\tau}) \}} + \frac{n\pi}{T}$$

Por consiguiente y aplicando (9), con el valor de  $\xi$  que hace  $I$  mínimo, se puede encontrar una función que suministra, dados el periodo de muestreo  $T$  y la constante de tiempo mecánica del motor  $\tau$ , el valor de la ganancia  $K$  que minimiza la función  $I$ , es decir, la integral del valor absoluto del error.

Este valor óptimo de  $K$  verifica la ecuación de tercer grado (ajustada por mínimos cuadrados):

$$(10) K = \frac{1}{\tau} \{ 0,56648 - 0,29663 \left( \frac{T}{\tau} \right) + 0,11353 \left( \frac{T}{\tau} \right)^2 - 0,01972 \left( \frac{T}{\tau} \right)^3 \}$$

Con este ajuste los errores cometidos son siempre inferiores al 0.4%.



La fórmula (10) permite, dado el periodo de muestreo utilizado  $T$  y la constante de tiempo  $\tau$ , encontrar el valor de  $K$  que optimiza la respuesta del servomecanismo.

En la gráfica de la figura 2.8 aparece para cada valor de  $\tau$  la relación entre  $K$  y  $T$ .

Como se puede observar, la constante de tiempo del motor influye decisivamente en el comportamiento del servomecanismo. Para valores altos de  $\tau$ , esto es, para motores de respuesta lenta, el valor del tiempo de muestreo no influye apenas en el valor de la ganancia del lazo  $K$ , que se mantiene prácticamente constante y con valores bajos. Por el contrario, si forman parte del lazo buenos motores con constante de tiempo de pocos milisegundos y se quiere trabajar, lógicamente, con ganancias altas con el fin de que la velocidad de respuesta del servomecanismo sea superior y consecuentemente su respuesta transitoria tenga menos efectos en el comportamiento global del sistema, será preciso utilizar periodos de muestreo bajo. El valor de 10 ms que aparece en la literatura se ve confirmado en esta gráfica como aceptable para toda una gama de motores habituales en máquinas-herramientas.

Naturalmente, todo lo anterior afecta a sistemas del tipo CNC2 y CNC3, muestreados por el hecho de formar el computador parte del lazo de control del servomecanismo. En las configuraciones CNC1 y CNC4 presentadas en 4.2.1. estos problemas desaparecen al poder ser considerados como sistemas casi continuos al tender a cero el valor de  $T$ . Para estas configuraciones, los puntos de corte de la familia de curvas de los distintos motores con el eje de ordenadas en la figura 2.8 proporcionan los valores recomendables de la ganancia  $K$  para un comportamiento óptimo del lazo.

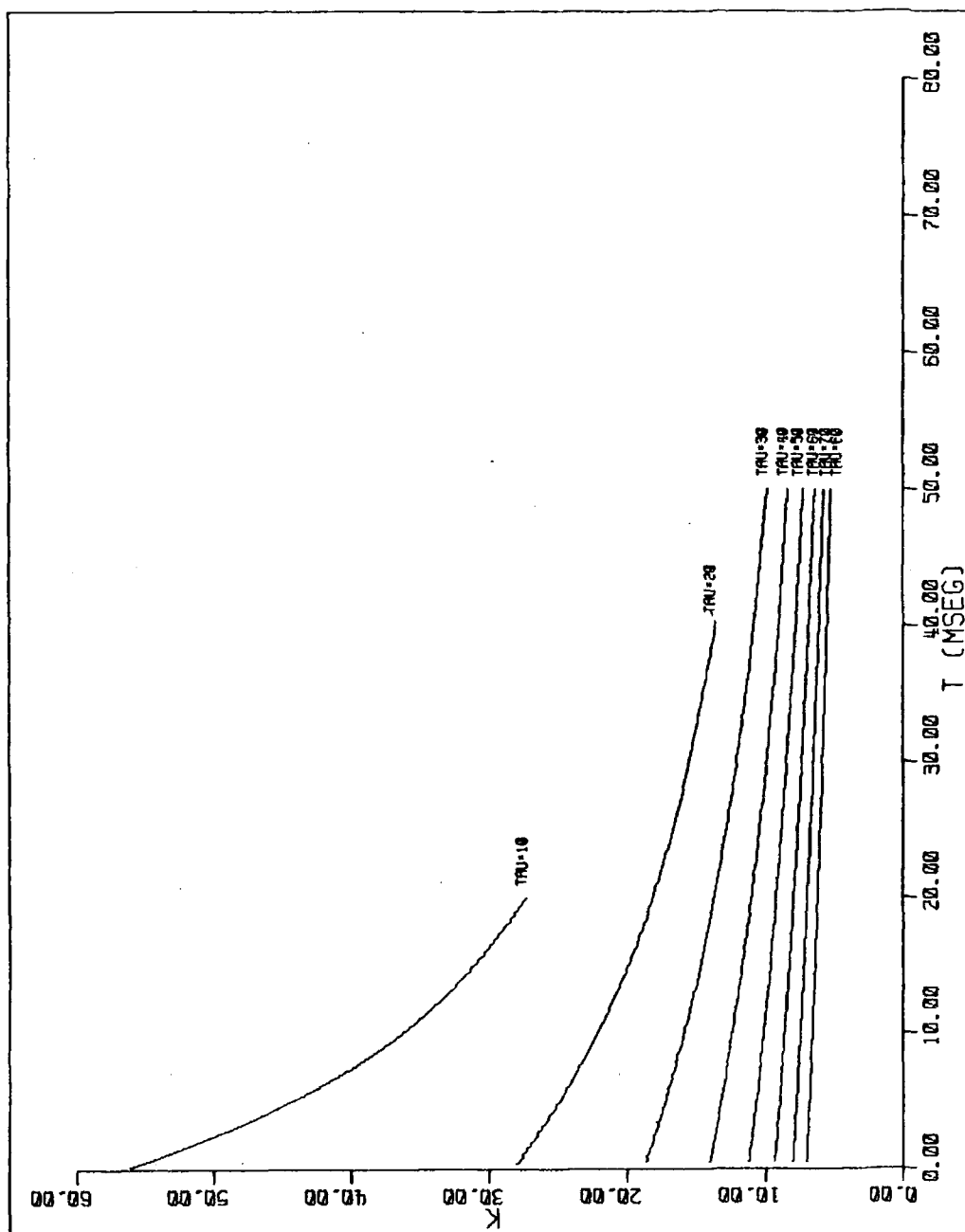


FIGURA 2.8

#### 2.4.4. Errores de perfil en contorno

Las prestaciones de un sistema de control numérico de máquina-herramienta para contorno pueden ser especificadas en muchos apartados. Uno de los más significativos quizá sea el de la precisión con que se pueden generar los contornos, dicho de otra manera, los errores de perfil que se producen.

Dado que la precisión final del sistema está determinada por los efectos combinados de los elementos individuales que lo componen y en orden a reducir o al menos acotar los errores dinámicos en contorno, se va a exponer un análisis de los errores provocados por los subsistemas parciales determinando a partir de ahí su contribución a la precisión y rendimiento del sistema total, tanto en el caso de la generación de segmentos rectos como en el de la generación de arcos de circunferencia.

##### 2.4.4.1. Contornos rectos en el plano

Consideremos un sistema de dos ejes con los diagramas de bloques de la figura 2.7. En este diagrama de bloques hemos supuesto que el sistema es de tipo continuo y no aparece por tanto el bloque correspondiente al retenedor de orden cero (ZOH).

La función de transferencia en lazo cerrado para cada eje es:

$$\frac{X_s(s)}{X_e(s)} = \frac{K_x/\tau_x}{s^2 + \frac{1}{\tau_x}s + \frac{K_x}{\tau_x}} \quad , \quad \frac{Y_s(s)}{Y_e(s)} = \frac{K_y/\tau_y}{s^2 + \frac{1}{\tau_y}s + \frac{K_y}{\tau_y}}$$

Las frecuencias naturales o de resonancia y los factores de amortiguamiento son:

$$\begin{aligned}\omega_{nx} &= \sqrt{K_x/\tau_x} & \omega_{ny} &= \sqrt{K_y/\tau_y} \\ \xi_x &= \frac{1}{2\sqrt{K_x\tau_x}} & \xi_y &= \frac{1}{2\sqrt{K_y\tau_y}}\end{aligned}$$

como ya se ha dicho en el párrafo anterior, y puede verse en las fórmulas anteriores, cuando las ganancias  $K_x$  y  $K_y$  aumentan, aumenta la velocidad de respuesta del sistema, disminuyendo los factores de amortiguamiento. Asimismo aumentos en las constantes de tiempo  $\tau_x$  y  $\tau_y$  provocan disminuciones en la velocidad de respuesta del sistema haciendo asimismo el sistema más oscilatorio.

Generalmente los parámetros  $\tau_x$  y  $\tau_y$  vienen impuestos por las características electromecánicas de los componentes, mientras que  $K_x$  y  $K_y$  pueden modificarse para obtener los resultados a alcanzar; deben ser altas para mejorar la respuesta y la precisión del sistema, pero su valor máximo está limitado para evitar las respuestas oscilatorias indeseables que se pueden producir para ganancias altas y factores de amortiguamiento bajos (P072). Los efectos de otros elementos de los subsistemas, no incluidos en el modelo básico tienen también a limitar los valores máximos de  $K_x$  y  $K_y$ .

El cálculo de los errores de perfil en contorno de rectas en el plano puede considerarse bajo dos condiciones distintas de mecanización: aceleración constante a lo largo de la recta, o bien velocidad constante a lo largo de la misma.

Se va a considerar únicamente el caso de velocidad constante, por ser el más usual, es decir, la generación de una línea recta que forma un ángulo  $\sigma$  con el eje  $x$  con una velocidad constante  $V$ .

En este caso, las funciones de entrada al servosistema son:

$$\begin{aligned} x_e(t) &= V_x t & \text{con } V_x &= V \cos \sigma \\ y_e(t) &= V_y t & \text{con } V_y &= V \sin \sigma \end{aligned}$$

con las condiciones iniciales:

$$x_S(0) = \dot{x}_S(0) = y_S(0) = \dot{y}_S(0) = 0$$

Para un sistema subamortiguado ( $\xi_x < 1$ ,  $\xi_y < 1$ ), las respuestas del sistema serán:

$$\begin{aligned} x_S(t) &= V_x \left[ t - \frac{1}{K_x} + \frac{2\tau_x}{\sqrt{4K_x\tau_x - 1}} e^{\frac{-t}{2\tau_x}} \operatorname{sen} \left( \frac{\sqrt{4K_x\tau_x - 1}}{2\tau_x} t - \gamma_x \right) \right] \\ (1) \\ y_S(t) &= V_y \left[ t - \frac{1}{K_y} + \frac{2\tau_y}{\sqrt{4K_y\tau_y - 1}} e^{\frac{-t}{2\tau_y}} \operatorname{sen} \left( \frac{\sqrt{4K_y\tau_y - 1}}{2\tau_y} t - \gamma_y \right) \right] \end{aligned}$$

donde:

$$\gamma_x = 2\operatorname{tg}^{-1} (-\sqrt{4K_x\tau_x - 1}), \quad \gamma_y = 2\operatorname{tg}^{-1} (-\sqrt{4K_y\tau_y - 1})$$

y las expresiones de los errores en cada eje serán:

$$\begin{aligned} e_x(t) &= V_x \left[ \frac{1}{K_x} - \frac{2\tau_x}{\sqrt{4K_x\tau_x - 1}} e^{\frac{-t}{2\tau_x}} \operatorname{sen} \left( \frac{\sqrt{4K_x\tau_x - 1}}{2\tau_x} t - \gamma_x \right) \right] \\ e_y(t) &= V_y \left[ \frac{1}{K_y} - \frac{2\tau_y}{\sqrt{4K_y\tau_y - 1}} e^{\frac{-t}{2\tau_y}} \operatorname{sen} \left( \frac{\sqrt{4K_y\tau_y - 1}}{2\tau_y} t - \gamma_y \right) \right] \end{aligned}$$

Si  $\xi_x > 1$  y  $\xi_y > 1$ , sistema sobreamortiguado, tendremos que las salidas en cada eje serán:

$$x_s(t) = V_x \left[ t \frac{1}{K_y} + \frac{\tau_x (a_x^2 e^{-a_x t} - b_x^2 e^{-b_x t})}{K_x (b_x - a_x)} \right]$$

$$y_s(t) = v_y \left\{ t - \frac{1}{K_y} + \frac{\tau_y (a_y^2 e^{-a_y t} - b_y^2 e^{-b_y t})}{K_y (b_y - a_y)} \right\} \quad (3)$$

donde:

$$a_x = \frac{1}{2\tau_x} (1 - \sqrt{1 - 4K_x \tau_x}) , \quad b_x = \frac{1}{2\tau_x} (1 + \sqrt{1 - 4K_x \tau_x})$$

$$a_y = \frac{1}{2\tau_y} (1 - \sqrt{1 - 4K_y \tau_y}) , \quad b_y = \frac{1}{2\tau_y} (1 + \sqrt{1 - 4K_y \tau_y})$$

Los errores en cada eje tienen las expresiones:

$$e_x(t) = v_x \left\{ \frac{1}{K_x} - \frac{\tau_x (a_x^2 e^{-a_x t} - b_x^2 e^{-b_x t})}{K_x (b_x - a_x)} \right\} \quad (4)$$

$$e_y(t) = v_y \left\{ \frac{1}{K_y} - \frac{\tau_y (a_y^2 e^{-a_y t} - b_y^2 e^{-b_y t})}{K_y (b_y - a_y)} \right\}$$

El error de contorno  $e(t)$  puede obtenerse aplicando la fórmula:

$$e(t) = \frac{v_x e_y(t) - v_y e_x(t)}{v} \quad (5)$$

Aplicando los valores  $v_x, v_y, e_x(t), e_y(t)$  en la fórmula anterior obtenemos el error de contorno tanto en los sistemas sobreamortiguados como subamortiguados.

Centrándose en el caso del control numérico a diseñar en que se generarán rectas a velocidad constante y con el criterio expuesto en 2.4.3, esto es, pensando en sistemas subamortiguados, se obtiene la expresión del error en régimen estacionario haciendo tender a cero los términos correspondientes al transitorio en (2) con lo que:

$$e_{xe}(t) = \frac{v_x}{K_x} , \quad e_{ye}(t) = \frac{v_y}{K_y}$$

Recordando  $V_x = V \cos \sigma$ ,  $V_y = V \sin \sigma$ , se tiene aplicando (5):

$$e_e(t) = \frac{V \cos \sigma V \sin \sigma}{K_y} - \frac{V \sin \sigma V \cos \sigma}{K_x} = \quad (6)$$

$$= V \left\{ \frac{\sin \sigma \cos \sigma}{K_y} - \frac{\sin \sigma \cos \sigma}{K_x} \right\} = \frac{V \sin 2\sigma}{2} \left\{ \frac{1}{K_y} - \frac{1}{K_x} \right\}$$

como expresión del error de perfil en régimen estacionario para la generación de tramos rectos en contorno.

Por lo tanto, de la ecuación (6) se deduce que si las ganancias  $K_x$  y  $K_y$  correspondientes a ambos ejes son iguales ( $K_x = K_y$ ) el error de contorno  $e_e(t)$  es nulo (error de contorno en régimen estacionario), aunque existen errores individuales en cada eje con respecto al tiempo.

El error del contorno será nulo cuando  $\sin 2\sigma = 0$  esto es, a lo largo del eje X o del eje Y, siendo máximo para  $\sigma = 45^\circ$ , esto es, sobre las bisectrices; en este caso su valor será:

$$e_{\max}(t) = \frac{V}{2} \left\{ \frac{1}{K_y} - \frac{1}{K_x} \right\} = \frac{V}{2K} \frac{\Delta K}{K}$$

donde

$$\Delta K = K_x - K_y, \quad K = \frac{1}{2} (K_x + K_y)$$

y

$$K_x K_y \approx K^2 \quad \text{para} \quad \frac{\Delta K}{K} \text{ pequeño}$$

Se puede concluir, pues, que el error en la generación de segmentos rectos depende principalmente del desajuste entre las ganancias de los ejes del sistema y es proporcional a la velocidad de generación, por lo que para conseguir una buena precisión es importante que las ganancias de los ejes estén bien ajustadas y que los valores de éstas sean elevados contribuyendo ambos factores a reducir los errores de perfil en contornos lineales. De aquí la importancia de incluir entre las posibilidades del sistema la programación de la ganancia del lazo de control.

En la práctica, sin embargo, y debido a una variedad de causas de tipo mecánico existen pequeños errores de contorno.

Todo lo expuesto a lo largo de este apartado como ya se dijo anteriormente se puede aplicar a sistemas continuos cuyo diagrama de bloques sea similar a los de la figura 2.7. Por tanto es aplicable a las configuraciones CNC1 y CNC4 de 2.4.1. Los resultados obtenidos serán también aplicables en el caso de diseño en base a las configuraciones CNC2 y CNC3 siempre que la frecuencia de muestreo implicada cumpla el teorema de Shannon, esto es, sea al menos siete veces superior a la anchura de banda propia del sistema.

Un problema que está ligado con los errores de perfil es el de encadenamiento de tramos rectos (realización de ángulos), naturalmente de forma continua, pues resulta trivial el posicionar la herramienta al final de un tramo y recorrer el siguiente a continuación, lo cual, aparte de reducir el rendimiento de la máquina puede producir un mecanizado deficiente de la pieza a fabricar.

Si se considera el caso extremo de generar un segmento horizontal (en el que no hay desplazamiento en el eje y) desde el punto  $(0,0)$  al  $(Vt_m,0)$  y a continuación otro vertical hasta el  $(Vt_m,V(t-t_m))$ , sucederá que a partir del instante  $t_m$ , en el que todavía no se ha alcanzado el valor  $Vt_m$  en el eje x, debido al error de seguimiento propio del sistema de control, comienza el desplazamiento a lo largo del eje y. En el eje x se llegará a alcanzar el valor fijado pero cuando haya habido desplazamiento en y, lo que introduce un cierto redondeo en el ángulo.



Cálculos realizados para un sistema continuo críticamente amortiguado dan para este caso límite una separación máxima entre la curva generada y la trayectoria de  $1.53 V_T$ . Así, para una velocidad máxima típica de mecanización de 5 cm/seg y una constante de tiempo del motor de 30 msg, esta separación sería de 0.7 mm. Si el diseño se realizase de acuerdo con el criterio de minimización de la integral del error absoluto expuesto en 2.4.3, esto es, sistemas ligeramente subamortiguados, con un rebasamiento máximo del 6 ó 7%, el error a fin de tramo sería algo mayor. Una posible solución a este problema puede ser el recorrer el tramo a dos velocidades distintas, una la programada, que se mantendría durante casi todo el tiempo, introduciéndose al final una velocidad preestablecida lo suficientemente baja, variable para cada máquina-herramienta de manera que la precisión conseguida esté dentro de la tolerancia exigida.

#### 2.4.4.2. Contornos Circulares

Dado que las entradas  $x_e(t)$  e  $y_e(t)$  de los servomecanismos de control de posición para la generación de arcos de circunferencia han de ser de tipo sinusoidal, la respuesta del sistema de control a las entradas:

$$x_e(t) = R \sin \omega t$$

$$y_e(t) = R \cos \omega t$$

siendo las condiciones iniciales:

$$x_s(0) = \dot{x}_s(0) = \dot{y}_s(0) = 0$$

$$y_s(0) = R$$

viene dada en (P072), para un sistema subamortiguado, por las expresiones:

$$x_s(t) = \frac{K_x}{\tau_x} \frac{R\omega}{\{(K_x/\tau_x - \omega^2)^2 + \omega^2/\tau_x^2\}^{1/2}} \cdot$$

$$\left\{ \frac{\sin(\omega t - \theta_{1x})}{\omega} + \frac{2\tau_x e^{-t/2\tau_x}}{\sqrt{4K_x \tau_x - 1}} \sin\left(\frac{\sqrt{4K_x \tau_x - 1}}{2\tau_x} t - \theta_{2x}\right) \right\}$$

$$y_s(t) = \frac{K_y R}{\tau_y \left\{ \left(\frac{K_y}{\tau_y} - \omega^2\right)^2 + \frac{\omega^2}{\tau_y^2} \right\}^{1/2}} \{ \cos(\omega t - \theta_{1y}) +$$

$$+ \frac{2\sqrt{K_y \tau_y} e^{-t/2\tau_y}}{\sqrt{4K_y \tau_y - 1}} \sin\left(\frac{\sqrt{4K_y \tau_y - 1}}{2\tau_y} t - \theta_{2y}\right) \} +$$

$$+ \frac{2R\sqrt{K_y \tau_y}}{\sqrt{4K_y \tau_y - 1}} e^{-t/2\tau_y} \sin\left(\frac{\sqrt{4K_y \tau_y - 1}}{2\tau_y} t + \theta_{3y}\right)$$

donde:

$$\theta_{1x} = \operatorname{tg}^{-1} \left( \frac{\omega}{K_x - \tau_x \omega^2} \right)$$

$$\theta_{2x} = \operatorname{tg}^{-1} \left( \frac{-\sqrt{4K_x \tau_x - 1}}{2\tau_x^2 \omega^2 - 2K_x \tau_x + 1} \right)$$

$$\theta_{1y} = \operatorname{tg}^{-1} \left( \frac{\omega}{K_y - \tau_y \omega^2} \right)$$

$$\theta_{2y} = -\operatorname{tg}^{-1} \left( \frac{\sqrt{4K_y \tau_y - 1}}{-1} \right) - \operatorname{tg}^{-1} \left( \frac{\sqrt{4K_y \tau_y - 1}}{2\tau_y^2 \omega^2 - 2K_y \tau_y + 1} \right)$$

$$\theta_{3y} = \operatorname{tg}^{-1} (\sqrt{4K_y \tau_y - 1})$$

Considerando el sistema en régimen estacionario las expresiones de  $x_s(t)$  e  $y_s(t)$  se simplifican notablemente, quedando reducidas a:

$$x_s(t) = \frac{K_x R \omega}{\tau_x \left\{ \left( \frac{K_x}{\tau_x} - \omega^2 \right)^2 + \frac{\omega^2}{\tau_x^2} \right\}^{1/2}} \sin \frac{(\omega t - \theta_{1x})}{\omega} \quad (1)$$

$$y_s(t) = \frac{K_y R}{\tau_y \left\{ \left( \frac{K_y}{\tau_y} - \omega^2 \right)^2 + \frac{\omega^2}{\tau_y^2} \right\}^{1/2}} \cos (\omega t - \theta_{1y})$$

El error en radio puede calcularse a partir de la relación:

$$e_r(t) = R \sqrt{x_s^2(t) + y_s^2(t)} \quad (2)$$

Para dos servomecanismos que respondan según la misma dinámica y perfectamente compensados, tendremos  $K_x = K_y = K$ ,  $\tau_x = \tau_y = \tau$ ,  $\theta_{1x} = \theta_{1y} = \theta_1$  y operando en (1), se obtienen:

$$x_s^2(t) = \frac{K^2 R^2}{\tau^2 \left\{ \left( \frac{K}{\tau} - \omega^2 \right)^2 + \frac{\omega^2}{\tau^2} \right\}} \sin^2 (\omega t - \theta_1)$$

$$y_s^2(t) = \frac{K^2 R^2}{\tau^2 \left\{ \left( \frac{K}{\tau} - \omega^2 \right)^2 + \frac{\omega^2}{\tau^2} \right\}} \cos^2 (\omega t - \theta_1)$$

luego:

$$x_s^2(t) + y_s^2(t) = \frac{K^2 R^2}{\tau^2 \left\{ \left( \frac{K}{\tau} - \omega^2 \right)^2 + \frac{\omega^2}{\tau^2} \right\}}$$

$$\frac{\sqrt{x_s^2(t) + y_s^2(t)}}{R} = \frac{K}{\tau \left( \left( \frac{K}{\tau} - \omega^2 \right)^2 + \frac{\omega^2}{\tau^2} \right)^{1/2}} = \frac{1}{\frac{\tau}{K} \left( \left( \frac{K}{\tau} - \omega^2 \right)^2 + \frac{\omega^2}{\tau^2} \right)^{1/2}}$$

Recordando las expresiones del factor de amortiguamiento y de la frecuencia natural o de resonancia:

$$\xi = \frac{1}{2\sqrt{K\tau}}$$

$$\omega_n = \sqrt{\frac{K}{\tau}}$$

$$\xi^2 = \frac{1}{4K\tau}, \quad \omega_n^2 = \frac{K}{\tau}, \quad \xi^2 4\tau^2 \omega_n^2 = 1, \quad \tau = \frac{1}{2\omega_n \xi}$$

sustituyendo estos valores en (3):

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{x_s^2(t) + y_s^2(t)}}{R} &= \frac{1}{\frac{1}{\omega_n^2} \left\{ (\omega_n^2 - \omega^2)^2 + 4\omega_n^2 \xi^2 \right\}^{1/2}} = \\ &= \frac{1}{\left\{ \frac{\omega_n^4}{\omega_n^4} + \frac{\omega^4}{\omega_n^4} - \frac{2\omega^2 \omega_n^2}{\omega_n^4} \frac{4\omega_n^2 \xi^2}{\omega_n^4} \right\}^{1/2}} = \frac{1}{\left\{ 1 + \left( \frac{\omega}{\omega_n} \right)^4 - 2 \left( \frac{\omega}{\omega_n} \right)^2 + \left( \frac{2\xi\omega}{\omega_n} \right)^2 \right\}^{1/2}} \end{aligned}$$

y de (2), el error relativo en radio será:

$$\frac{e_r(t)}{R} = 1 - \frac{1}{\left\{ 1 + \left( \frac{\omega}{\omega_n} \right)^4 - 2 \left( \frac{\omega}{\omega_n} \right)^2 + \left( \frac{2\xi\omega}{\omega_n} \right)^2 \right\}^{1/2}}$$

expresión del error de perfil dada en función, pues, de la frecuencia propia del sistema, de la frecuencia natural y del factor de amortiguamiento, para un sistema en que los servomecanismos de ambos ejes está perfectamente compensados y responden según la misma dinámica. El segundo término del segundo miembro

es el módulo de la amplitud de respuesta o ganancia del sistema, por lo que la fórmula anterior puede escribirse:

$$\frac{e_r(t)}{R} = 1 - |M|$$

Dado que el desarrollo anterior es para sistemas continuos, y la introducción del microprocesador en el lazo de control obliga a considerar sistemas muestreados, veamos el valor de M para este tipo de sistemas.

El comportamiento sinusoidal del sistema, ante unas entradas y condiciones iniciales iguales a las dadas al principio de este apartado se puede obtener sustituyendo  $z=e^{st}$  e igualando el operador de Laplace  $s$  a  $j\omega$ , donde  $\omega$  es la frecuencia circular, en la función de transferencia dada en 2.4.2.2.:

$$M = \frac{C(z)}{R(z)} = \frac{Az + B}{z^2 + z(A-1-E) + B+E}$$

siendo:

$$A = K \{ T - \tau (1-E) \}$$

$$B = K \{ \tau (1-E) - TE \}$$

Realizando la sustitución ya indicada:

$$z = e^{st} = e^{j\omega T} = \cos \omega T + j \sin \omega T$$

y por tanto:

$z^2 = \cos 2\omega T + j \sin 2\omega T$ , donde T es el periodo de muestreo.

Llamando  $P_1 = \cos \omega T$ ,  $P_2 = \cos 2\omega T$ ,  $S_1 = \sin \omega T$ ,  $S_2 = \sin 2\omega T$ ,  $Q = A-1-E$ , se tiene:

$$M = \frac{A(P_1 + jS_1) + B}{(P_2 + jS_2) + (P_1 + jS_1)Q + B + E} = \frac{AP_1 + B + jAS_1}{P_2 + QP_1 + B + E + j(S_2 + QS_1)} = |M| e^{j\psi}$$

Donde,  $|M|$  es la ganancia de respuesta o ganancia, y  $\psi$  es el ángulo de fase. El valor buscado de  $|M|$  es, por tanto:

$$|M| = \left( \frac{A^2 + B^2 + 2ABP_1}{(B+E)^2 + Q^2 + 1 + 2\{(B+E)P_2 + (B+E+1)QP_1\}} \right)^{1/2}$$

Considerando que  $B+E+Q+1 = A+B$  y que  $P_2 = 2P_1 + 1$ , la expresión anterior queda:

$$|M| = \left( \frac{(A+B)^2 + 2AB(P_1 - 1)}{(A+B)^2 + 2G(P_1 - 1)} \right)^{1/2} \quad (5)$$

siendo  $G = (B+E+1)Q + 2(B+E)(P_1 + 1)$

Dado que la anchura de banda del sistema es el rango de frecuencias entre cero y  $f_0$ , siendo  $f_0$  la frecuencia de corte, normalmente definida como la frecuencia a la cual la ganancia decrece 3 db, la fórmula anterior nos permite conocer la anchura de banda de dicho sistema. Para calcular la frecuencia de corte  $f_0$  bastará, por tanto, igualar la ecuación anterior a 0.7.

Considerando, pues, de nuevo la expresión (4) para valores muy pequeños de  $e_r$  se puede hacer la aproximación:

$$M^2 = 1 - 2 \frac{e_r}{R}$$

Introduciendo el valor de  $|M|$  para sistemas muestreados dado por (5):

$$\frac{(A+B)^2 + 2AB(P_1 - 1)}{(A+B)^2 + 2G(P_1 - 1)} = 1 - 2 \frac{e_r}{R}$$

De donde:

$$-2 \frac{e_r}{R} = \frac{(A+B)^2 + 2AB(P_1 - 1)}{(A+B)^2 + 2G(P_1 - 1)} - 1 =$$

$$= \frac{(A+B)^2 + 2AB(P_1-1) - (A+B)^2 - 2G(P_1-1)}{(A+B)^2 + 2G(P_1-1)} = \frac{(P_1-1)(2AB-2G)}{(A+B)^2 + 2G(P_1-1)}$$

$$(AB-G)(P_1-1) = -\{(A+B)^2 + 2G(P_1-1)\} \frac{e_r}{R}$$

Como el término  $\omega T$  es pequeño, se puede despreciar el término  $2G(P_1-1)$ , quedando:

$$-\frac{e_r}{R} = \frac{(AB-G)(P_1-1)}{(A+B)^2}$$

Sustituyendo los valores de A, B, G y operando, se obtiene:

$$-\frac{e_r}{R} = \frac{K(T-2T_1)-1}{K^2 T^2} (P_1-1) \quad (6)$$

Desarrollando  $P_1 = \cos \omega_r T$  en serie de MacLaurin, se tiene:

$$P_1 = 1 - \frac{(\omega T)^2}{2} + \dots$$

en que se omiten los demás términos por ser  $\omega_r T$  muy pequeño. Sustituyendo este valor de  $P_1$  en (6):

$$-\frac{e_r}{R} = \frac{K(T+2T_1)-1}{K^2 T^2} \left\{ -\frac{(\omega T)^2}{2} \right\}$$

y por tanto:

$$\frac{e_r}{R} = \frac{K(T+2T_1)-1}{2K^2} \omega^2 \quad (7)$$

Dado que en control numérico de máquinas-herramienta lo usual es programar la velocidad de avance lineal, denominado habitualmente por F, se tiene  $F = \omega R$  y sustituyendo en (7):

$$\frac{e_r}{R} = \frac{K(T+2T_1)-1}{2K^2} \frac{F^2}{R^2}$$

luego:

$$\frac{F^2}{R} = \frac{2K^2 e_r}{K(T+2\tau)-1}$$

que muestra que la velocidad de avance y el radio mantienen una relación parabólica siempre que  $e_r$  y  $\omega T$  sean pequeños.

Por otra parte, si  $F_m$  es el valor máximo de la velocidad lineal de avance la ecuación anterior nos indica que el cociente  $F_m^2/R$  tiene un límite si se quiere realizar una generación de arcos dentro de la tolerancia dada por  $e_r$ , es decir:

$$a_{cm} = \frac{F_m^2}{r} \leq \frac{2K^2 e_r}{K(T+2\tau)-1}$$

donde  $a_{cm}$  es el valor máximo en módulo tolerable para la aceleración centrípeta.

Esta desigualdad obtenida permite conocer, para una tolerancia exigida  $e_r$ , y unos valores de  $T$  y  $K$ , obtenido este último de la aplicación del criterio de minimización de la integral del valor absoluto del error:

- a.- la velocidad de avance máxima  $F_m$  a la cual podremos mecanizar un arco de circunferencia de radio  $R$  dado con una precisión aceptada, o bien
- b.- el radio mínimo  $R$  del arco que se podrá mecanizar a una velocidad lineal  $F$  dada.



Estos resultados se plasman en la serie de gráficas que se incluyen a continuación. En la figura 2.9, se muestra la aceleración centrípeta máxima admisible en función del periodo de muestreo, siendo constante en cada curva la constante de tiempo de los motores. La curva superior corresponde a  $\tau = 10$  msg y los incrementos de  $\tau$  de 10 msg también, correspondiendo la curva inferior al valor  $\tau = 80$  msg.

A continuación se ofrece una familia de gráficas similares, en las que se ve la relación entre el radio mínimo admisible y la velocidad lineal de mecanización para diversos valores del periodo de muestreo, considerando en cada gráfica la constante de tiempo mecánica del motor  $\tau$  (figuras 2.10a a 2.10h). Los periodos de muestreo a considerar son los comprendidos en el rango de 0 a 20 msg, siendo un valor recomendable el de 10 msg, como ya se ha indicado anteriormente. Como se puede observar en esta familia de gráficas, para mecanizar un arco de circunferencia a una velocidad aceptable y sin restricciones importantes en cuanto al radio mínimo, es preciso utilizar motores de baja constante de tiempo, ya que en otro caso la respuesta del sistema no cumplirá las exigencias habituales en control numérico en cuanto a errores de perfil. Las unidades en que están expresadas las magnitudes de estas gráficas y las siguientes son las del sistema internacional.

Finalmente (figuras 2.11a, b y c) se muestra la relación entre velocidad lineal y radio mínimo para valores constantes del periodo de muestreo, obteniéndose familias de curvas para los distintos valores de  $\tau$ . En la figura 2.11a, donde el periodo de muestreo es igual a cero, se muestra el comportamiento que cabe esperar

si se adoptan para el diseño las configuraciones CNC1 y CNC4 presentadas en 2.4.1, donde  $T$  tiende a 0. Las otras dos figuras siguientes muestran las restricciones en radio que resultan en sistemas muestreados, esto es, en configuraciones CNC2 y CNC3. Como se puede apreciar, las restricciones en radio mínimo, a igualdad de los restantes parámetros, son mayores a medida que se incrementa el período de muestreo.

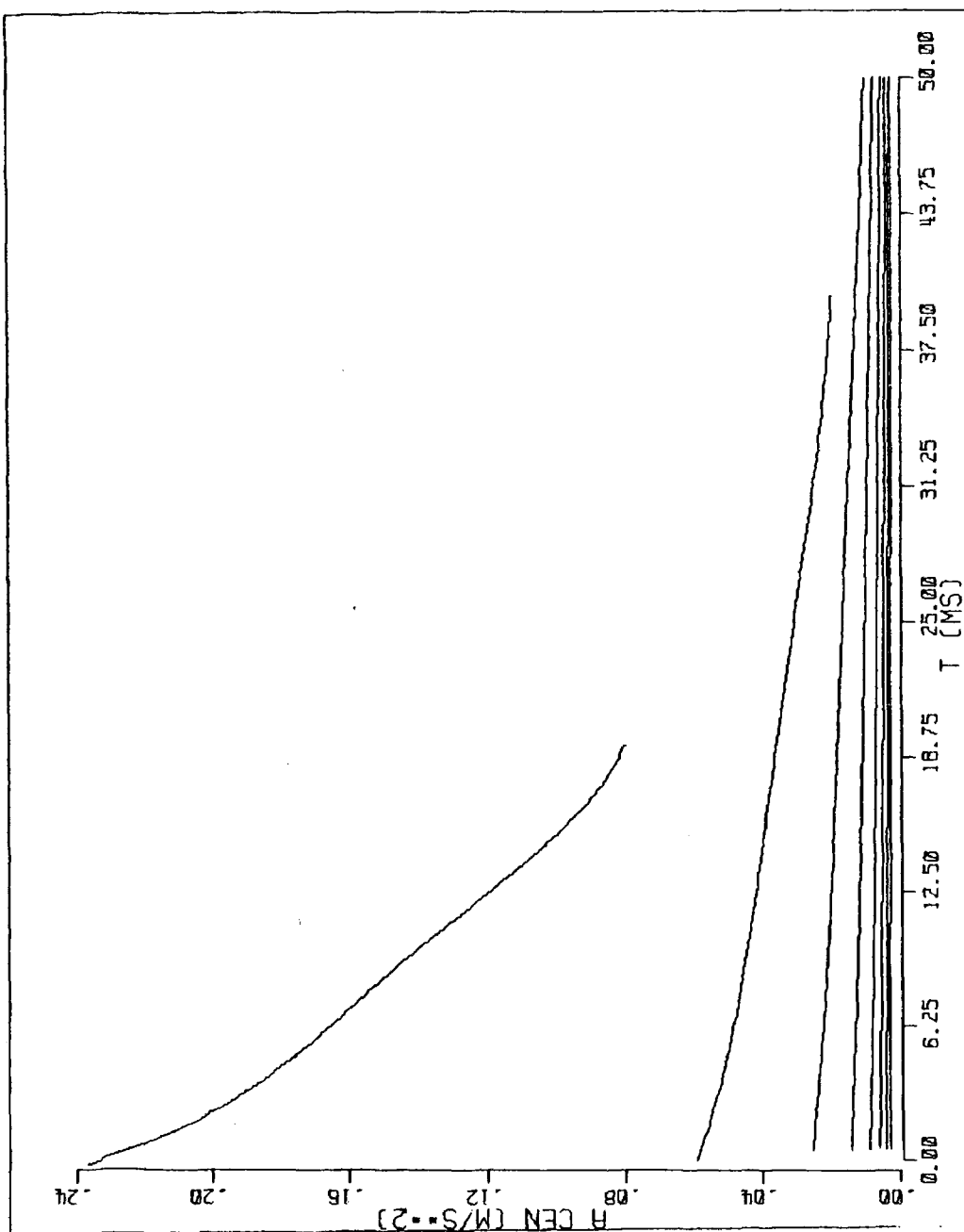


FIGURA 2.9

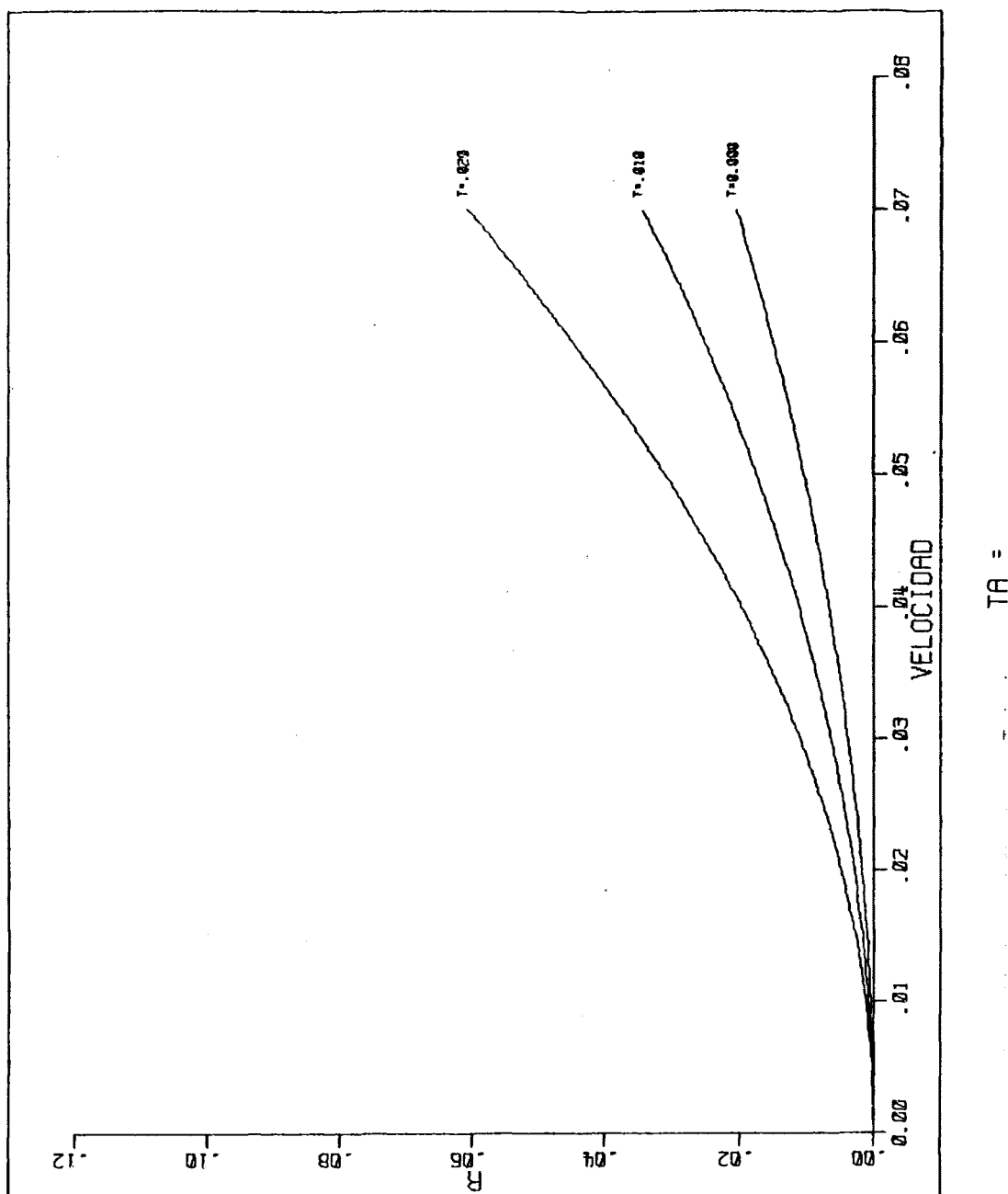


FIGURA 2.10A

-75<sup>1</sup>

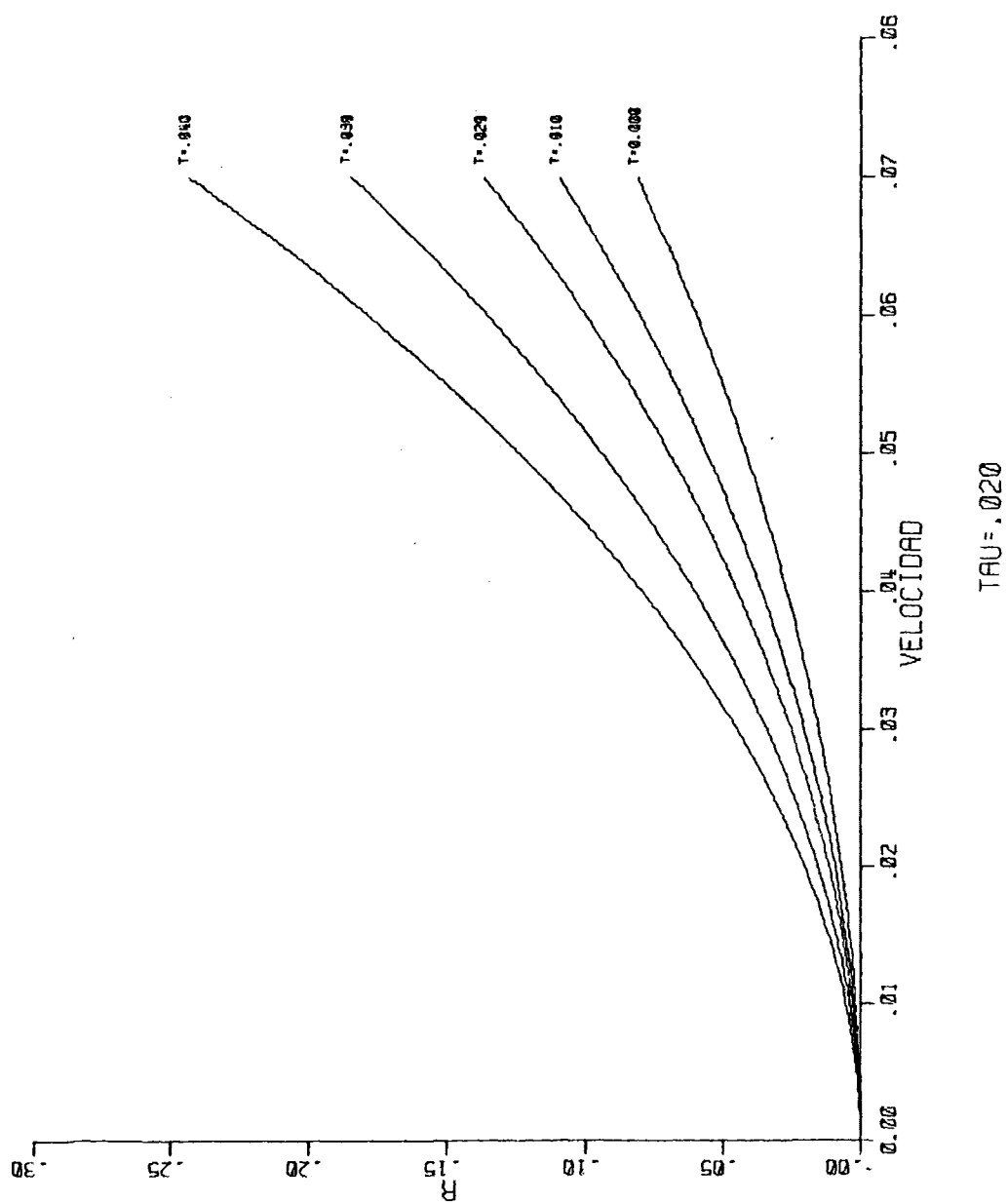


FIGURA 2.10B

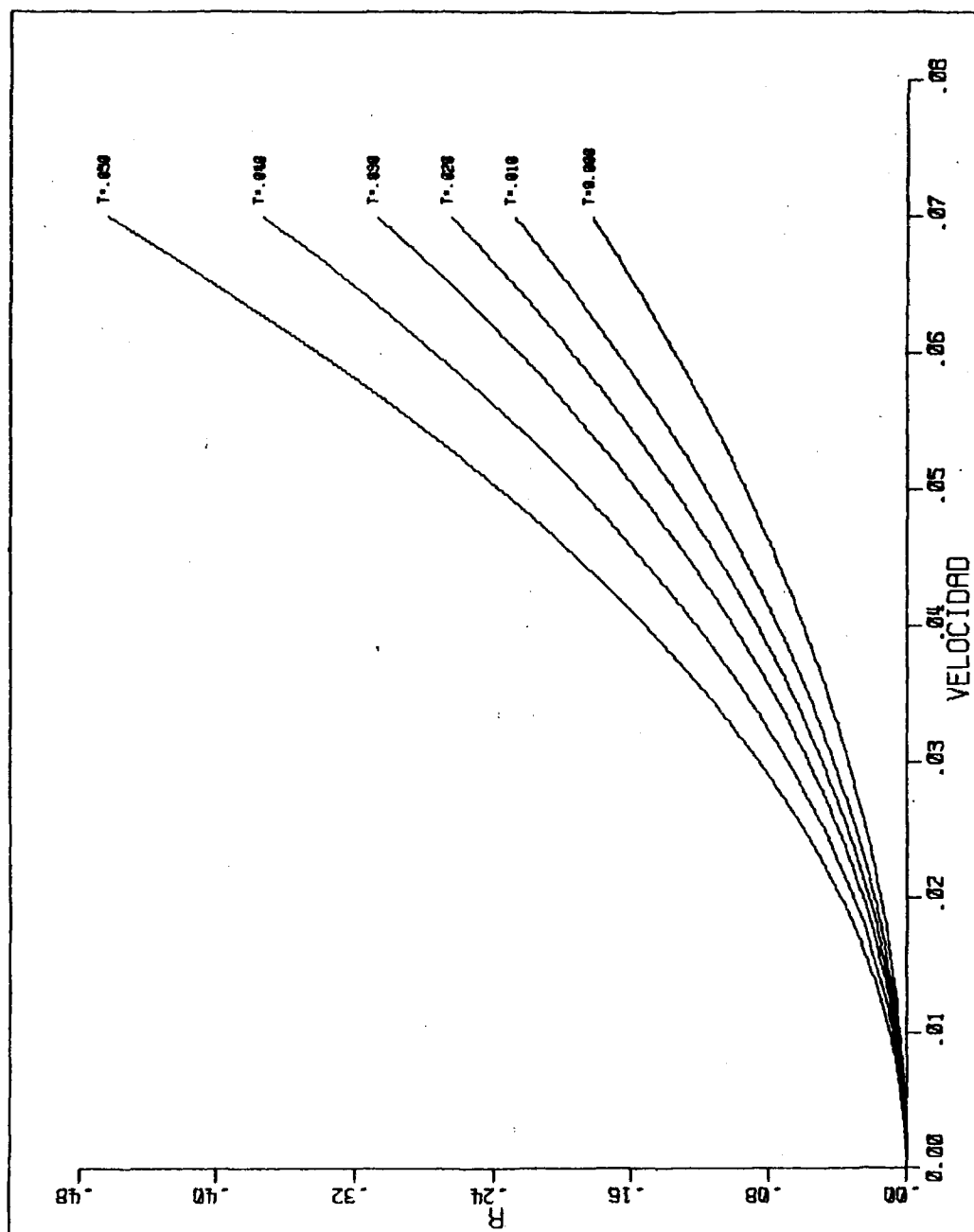


FIGURA 2.10c

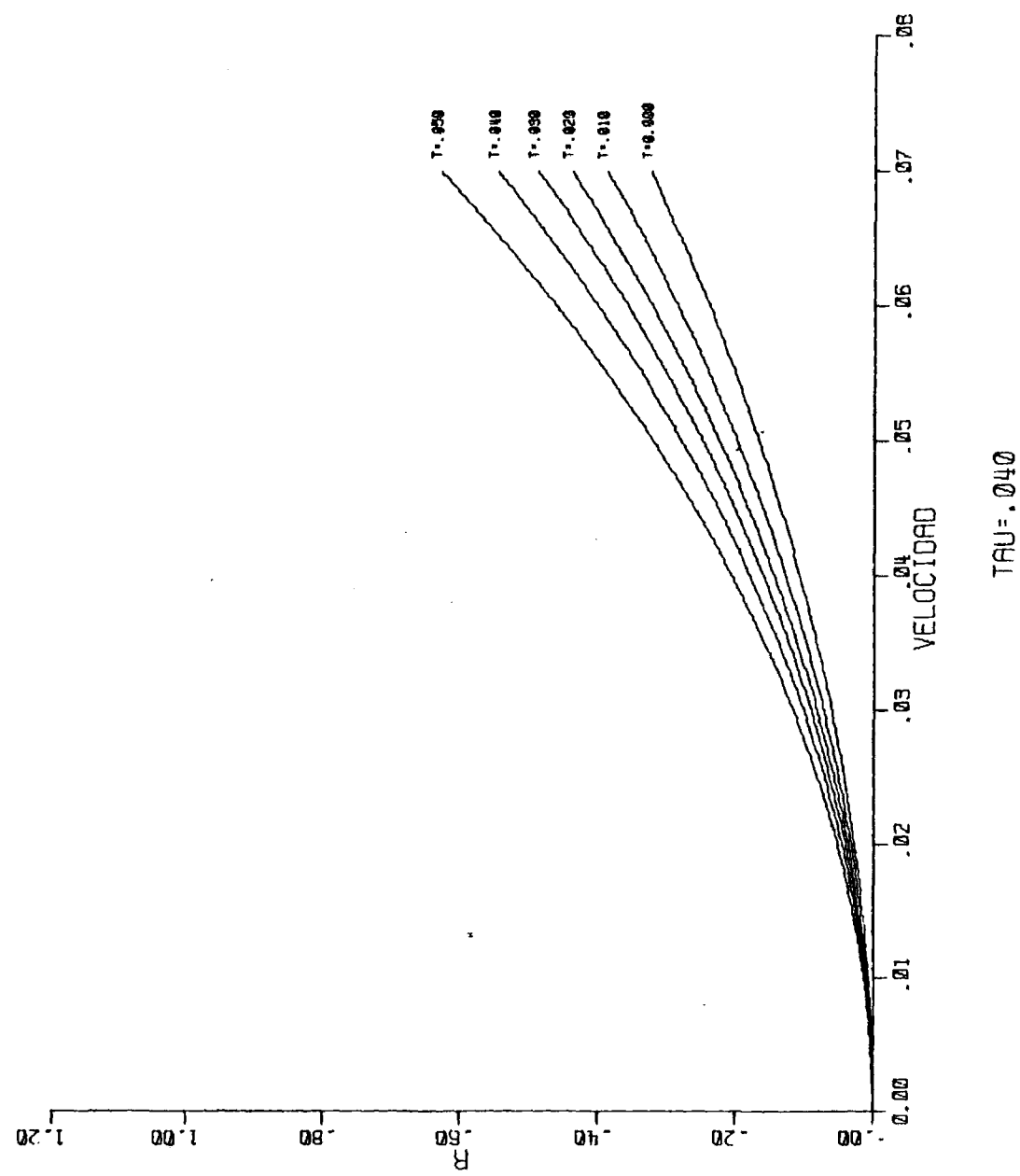


FIGURA 2.10b

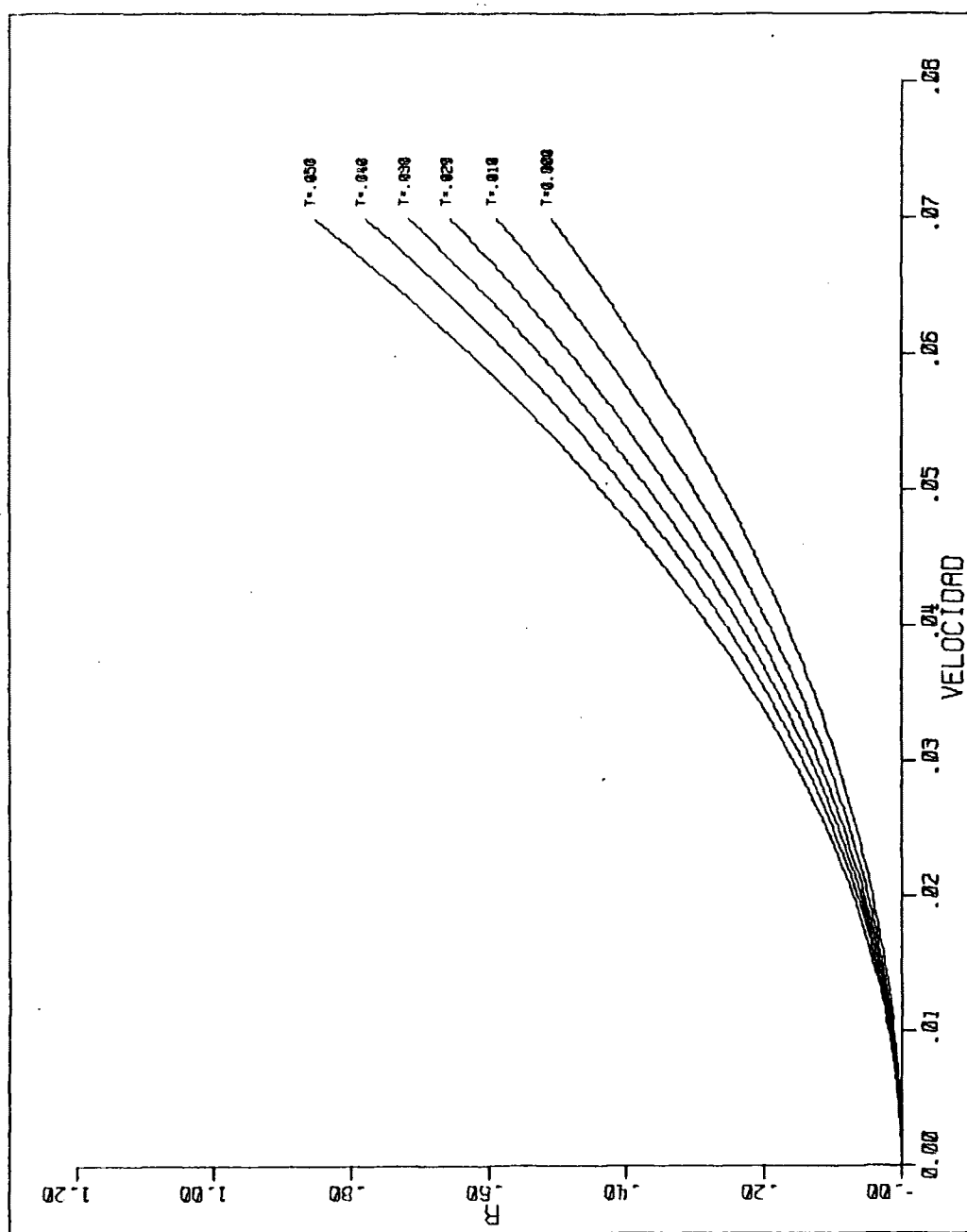


FIGURA 2.10E



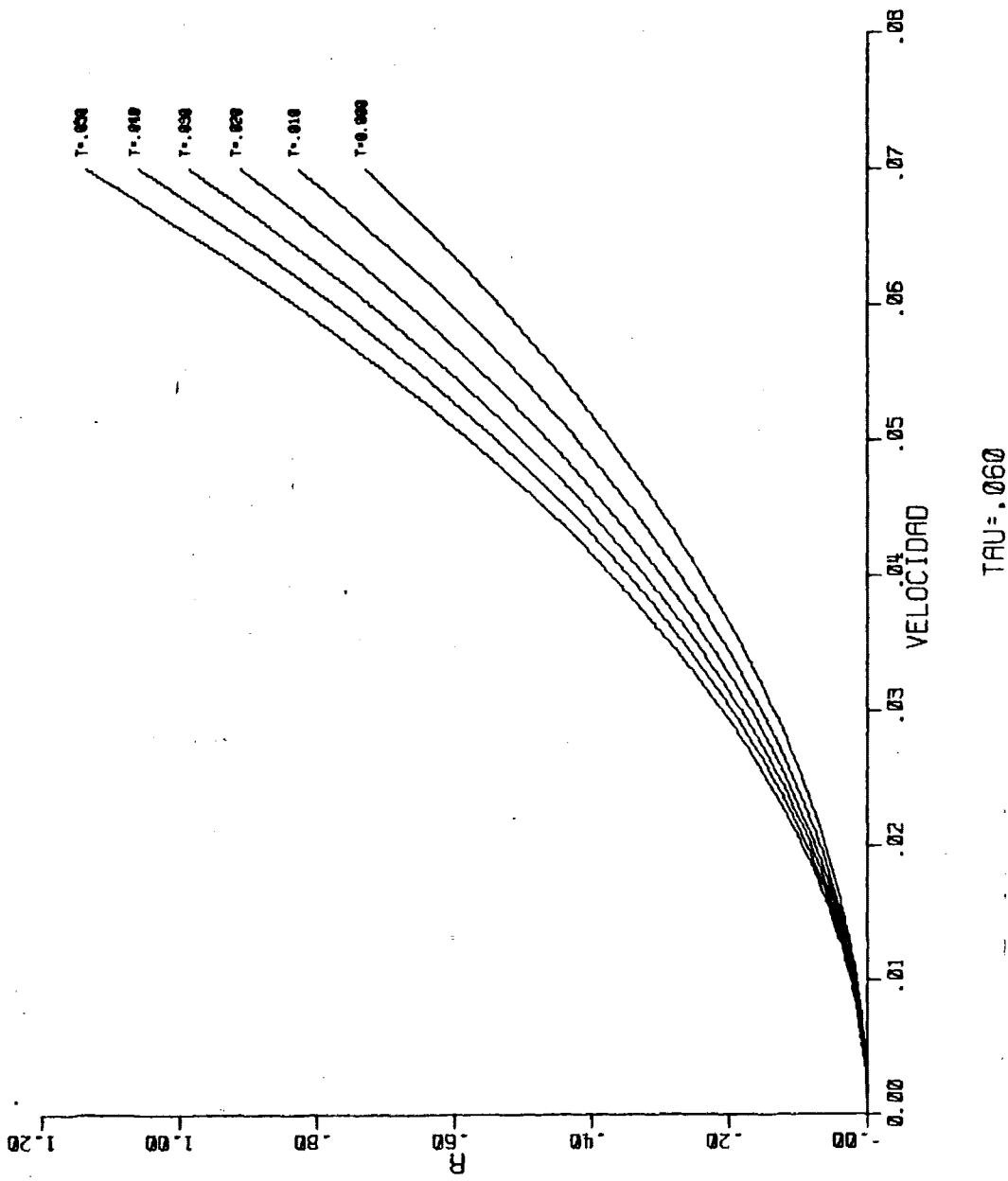


FIGURA 2.10f

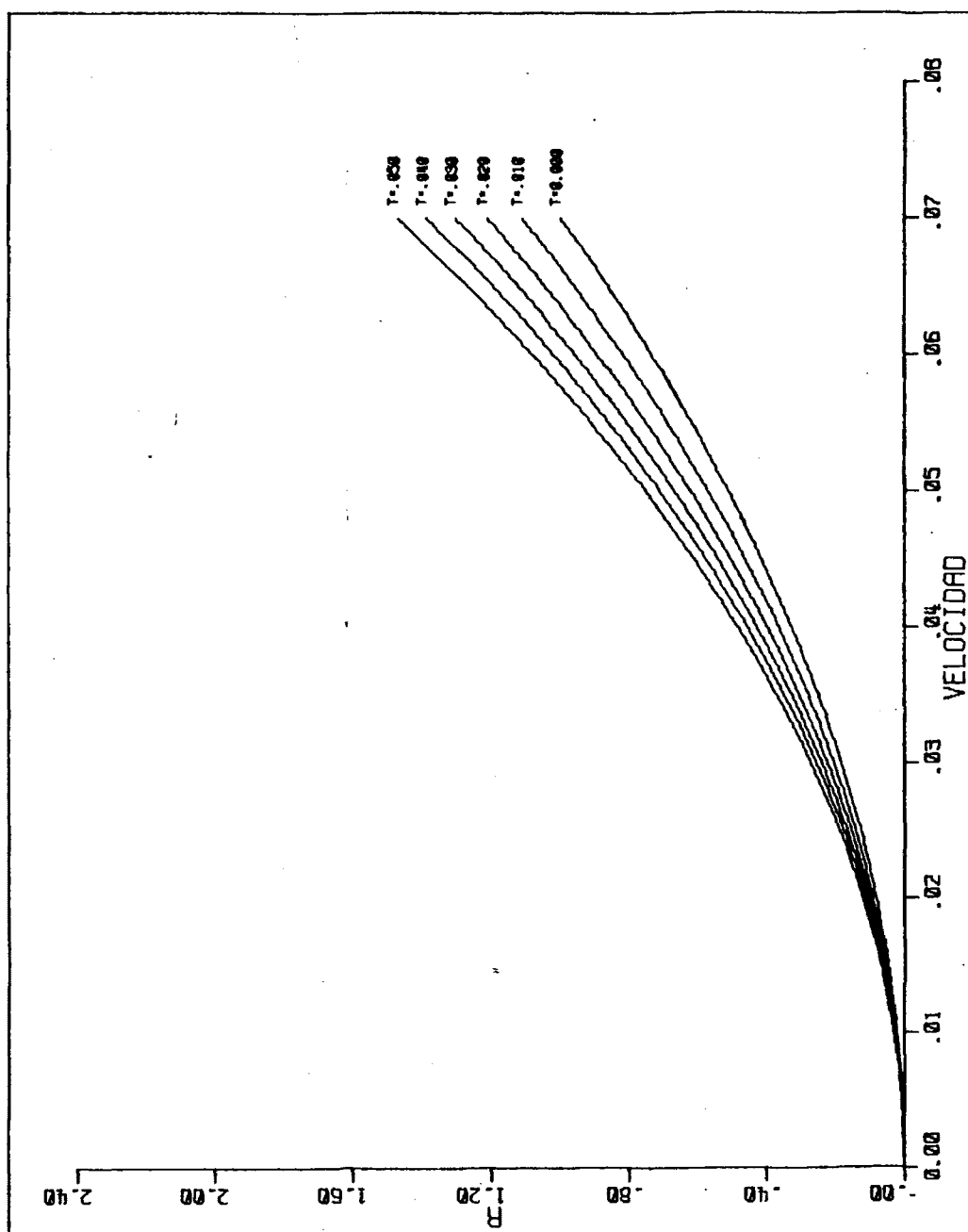


FIGURA 2.10G

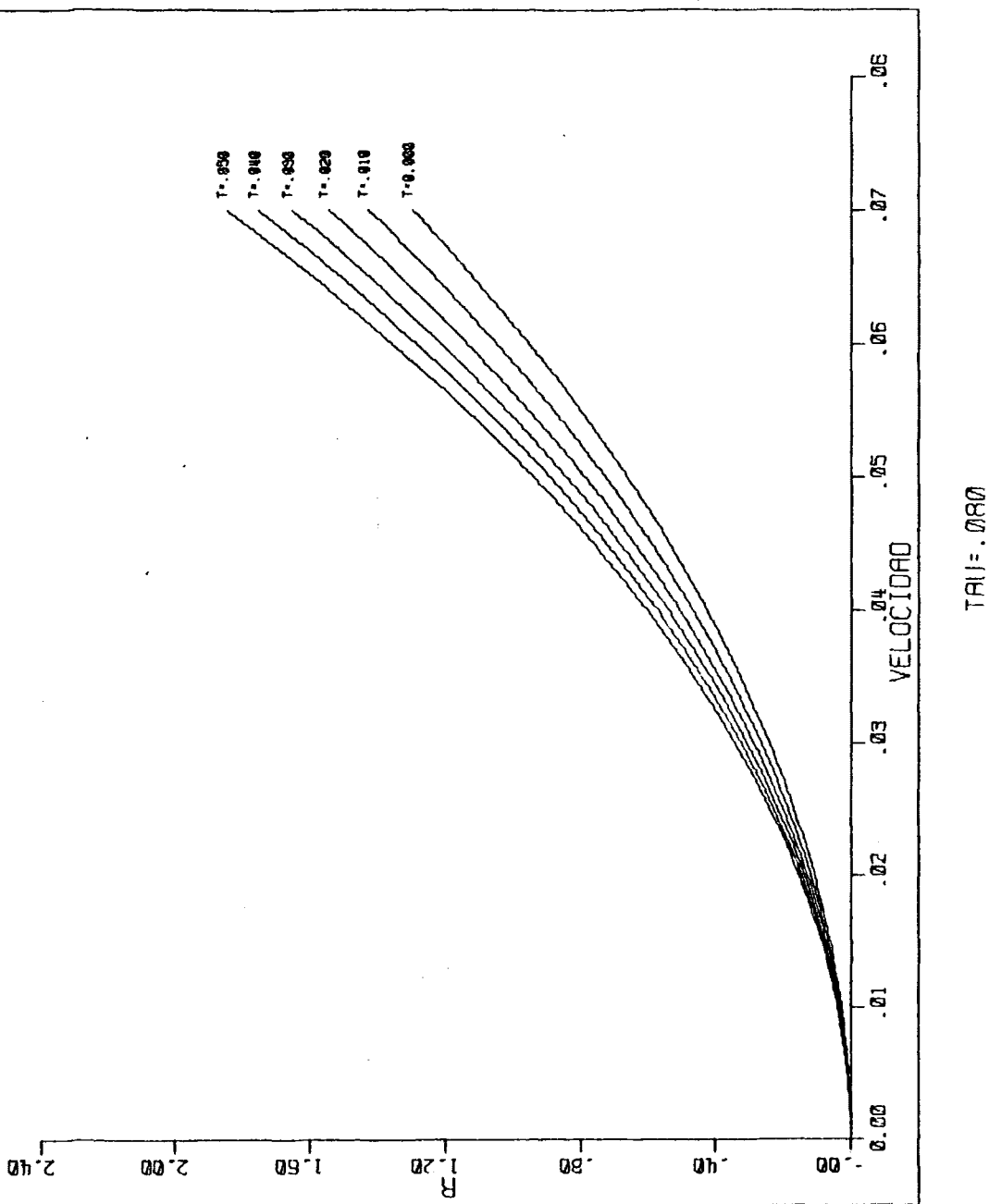


FIGURA 2.10H

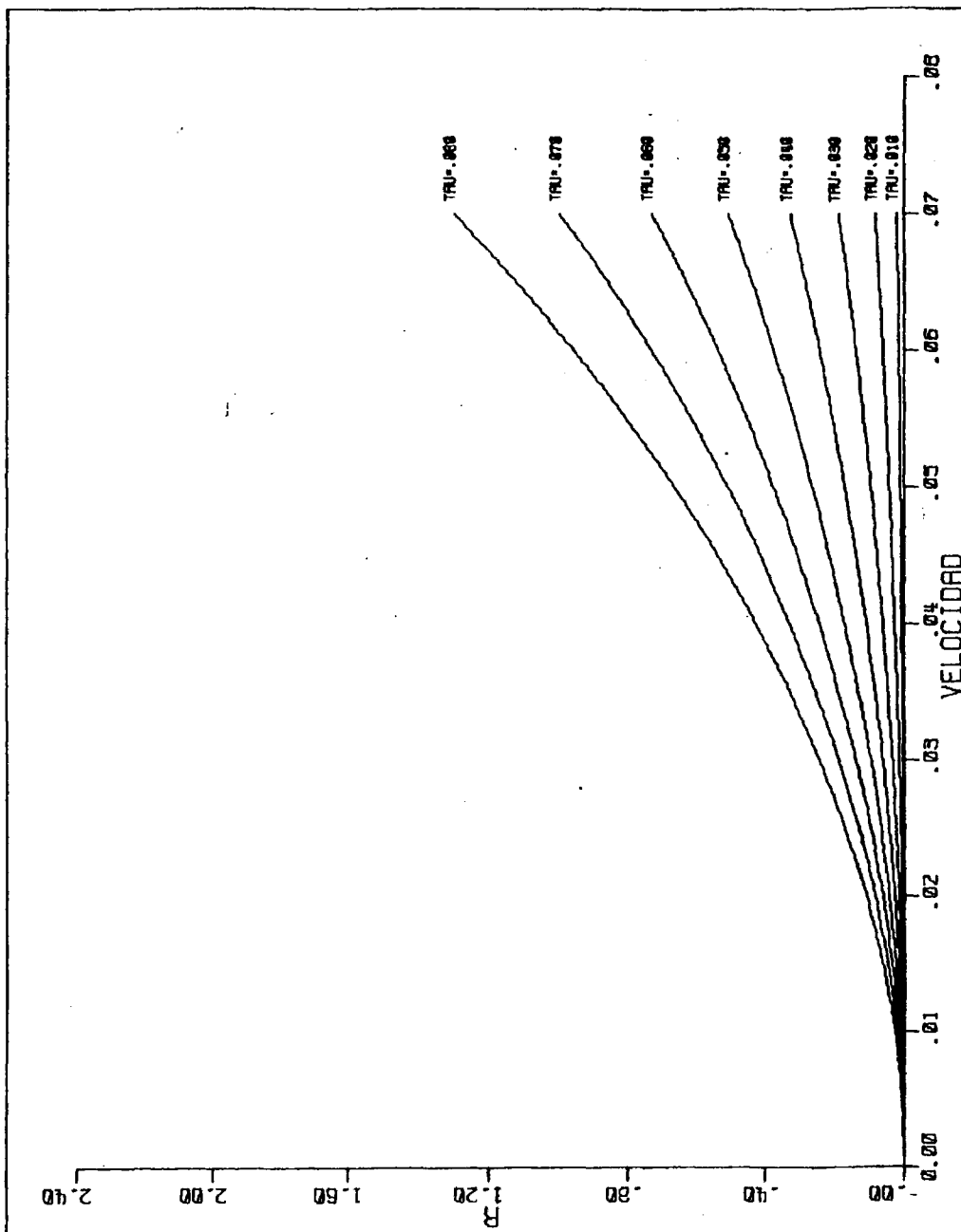


FIGURA 2.11A

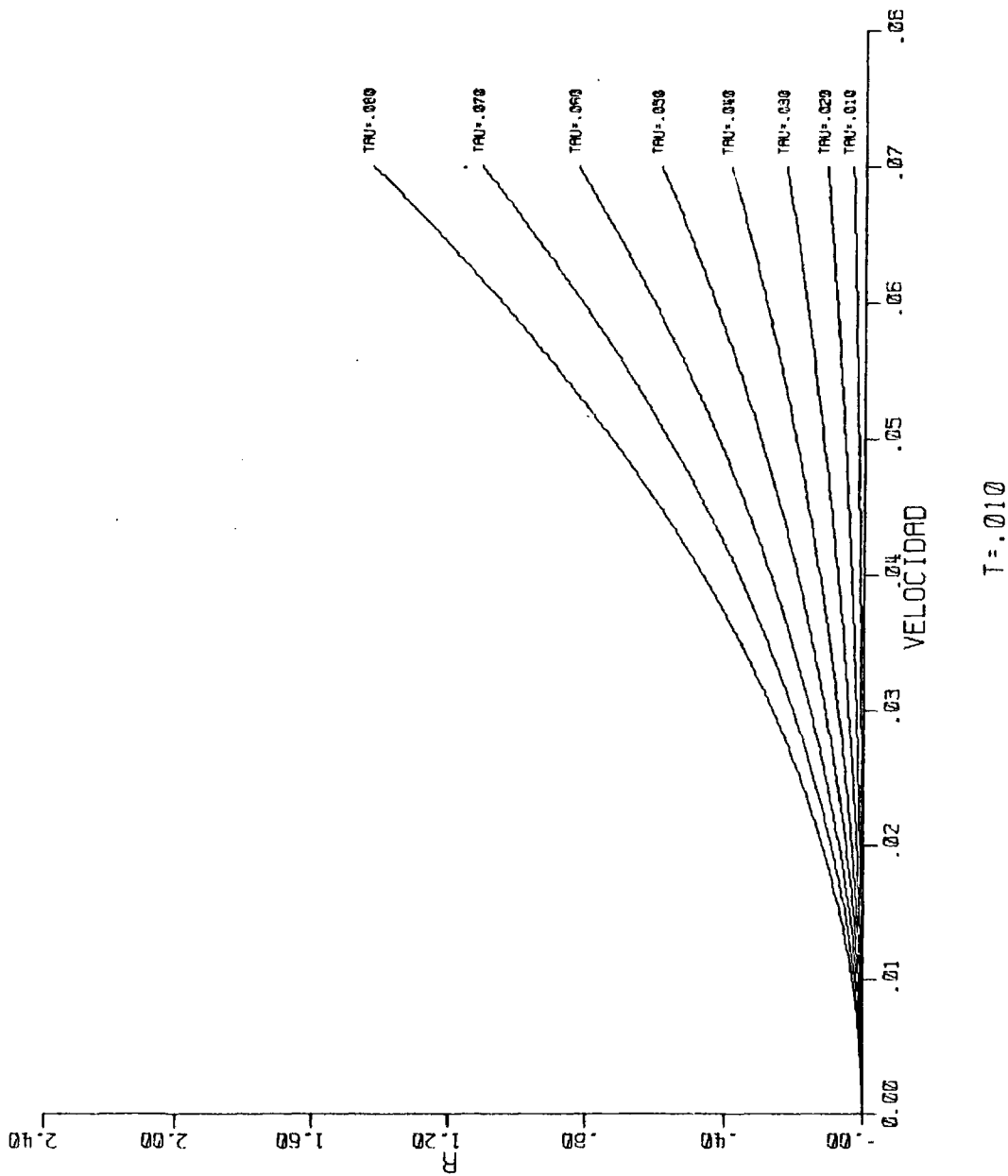
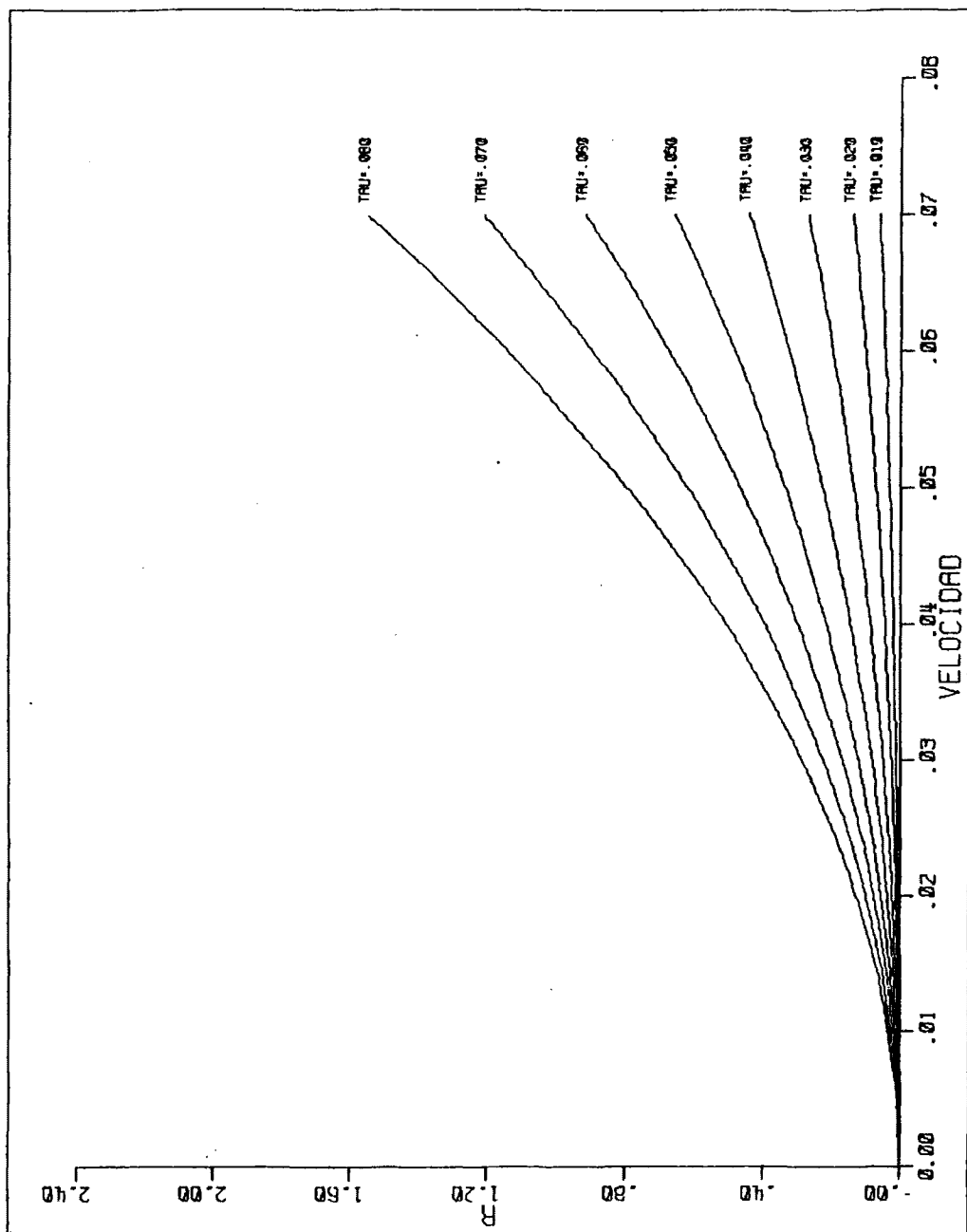


FIGURA 2.11B



T = .0

FIGURA 2.11c

### C A P I T U L O   I I I

#### GENERACION DE CURVAS

##### 3.1. INTRODUCCION

Una de las funciones que debe cumplir un control numérico con contorno es la de gobernar los motores de la máquina-herramienta de manera que el útil de ésta describa sobre la pieza a mecanizar una curva determinada. El dispositivo encargado de realizar esta tarea es el interpolador que, en esencia, ha de crear (caso de interpolación en el plano) dos salidas, una destinada a regir el eje X y otra el eje Y. Estas salidas son trenes de impulsos cuya relación en cada intervalo de tiempo  $\Delta t$  depende de la curva a generar; en el caso de una recta dependerá de su pendiente, en el de un arco de circunferencia dependerá del radio de curvatura y el sentido, etc.

Para realizar este proceso de interpolación, se pueden utilizar técnicas analógicas (interpolador analógico) o técnicas digitales (interpolador numérico). Debido a la precisión de operación requerida el interpolador debe ser necesariamente del segundo tipo, ya que el cálculo analógico puede conducir a errores fuera de la tolerancia que las exigencias de mecanización imponen.

Vamos, pues, a centrar nuestro estudio en los métodos numéricos, que dividimos en dos grandes categorías, paramétricos y no paramétricos.

### 3.2. METODOS PARAMETRICOS

En el diseño de un interpolador numérico tiene gran importancia la representación matemática de la curva a generar. Podemos considerar una representación paramétrica y una representación no paramétrica.

Para una circunferencia de radio R centrada en el origen los dos tipos de representación serían:

$$\begin{aligned}x &= R \sin \theta \\y &= R \cos \theta\end{aligned}\quad (\text{ecuaciones paramétricas})$$

$$y \quad x^2 + y^2 - R^2 = 0 \quad (\text{ecuación no paramétrica})$$

Los interpoladores que se apoyan en la representación paramétrica suelen denominarse "Analizadores Diferenciales Digitales" (A.D.D.) Su nombre proviene del hecho de que proceden por resolución de las ecuaciones diferenciales que rigen el movimiento a lo largo de la curva a generar (SI 68).

Los A.D.D. están siendo utilizados, según distintas configuraciones, en la mayor parte de los controles numéricos actuales y su funcionamiento es estudiado a continuación, si bien de forma no exhaustiva.

#### 3.2.1. Analizador Diferencial Digital

En el plano coordenado xy una curva puede ser escrita de la forma:

$$\begin{aligned}x &= x(t) \\y &= y(t)\end{aligned}$$



El parámetro  $t$  varía a lo largo de la curva, y como el interpolador gobierna el movimiento a lo largo de la misma, podemos identificar el parámetro  $t$  con el tiempo.

Diferenciando se obtiene:

$$\begin{aligned} dx &= \frac{dx}{dt} dt = \dot{x} dt \\ dy &= \frac{dy}{dt} dt = \dot{y} dt \end{aligned} \quad (1)$$

En todo lo que sigue, vamos a identificar  $dx$  con  $\Delta t$ ,  $dy$  con  $\Delta y$  y  $dt$  con  $\Delta t$ . De esta forma, y aceptando siempre que  $\Delta t$  es lo suficientemente pequeño, se puede suponer que:

$\dot{x} \Delta t$  es una aproximación de  $\int \dot{x} dt$

$\dot{y} \Delta t$  es una aproximación de  $\int \dot{y} dt$

Haciendo estas suposiciones, las ecuaciones (1) son sólo aproximadas, introduciéndose por tanto errores sistemáticos.

Veamos como utiliza el A.D.D. estas ecuaciones para la generación de la curva, para lo que nos apoyaremos en la figura 3.1, siendo la figura 3.2 una representación simbólica del mismo.

El valor inicial de  $\dot{x}$  es colocado en el registro  $\dot{x}$ . Durante cada período de iteración tienen lugar dos operaciones:

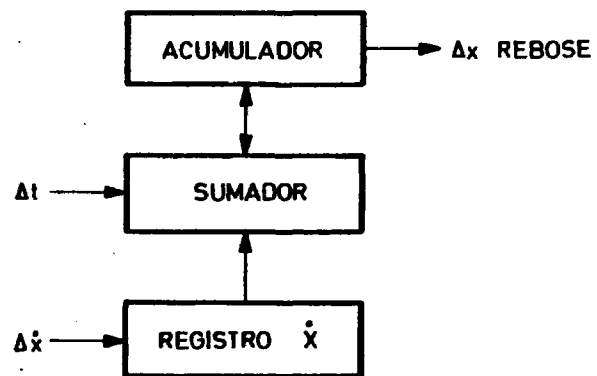


Fig. 3.1

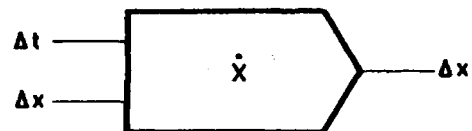


Fig. 3.2

- El registro  $x$  se actualiza sumándole  $\Delta x$
- El valor actualizado de  $x$  se suma, controlado por  $\Delta t$ , con el contenido del acumulador.

La salida  $\Delta x$  es el rebose del acumulador y constituye la salida del integrador. Debe notarse que tanto los incrementos de entrada como de salida son ternarios, pudiendo tomar los valores  $+1, 0$  ó  $-1$ .

En forma totalmente análoga se obtendría el incremento de  $y$ , que sería la otra salida del interpolador.

Estos integradores digitales así definidos se pueden utilizar para resolver ecuaciones diferenciales, y por tanto, para generar curvas, a base de interconectar varios de una cierta forma, en forma análoga a como funciona un computador analógico.

Un sistema basado en A.D.D. puede funcionar de dos formas: simultánea y secuencial. En la primera todos los integradores son procesados a la vez, siendo el tiempo de procesamiento el llamado periodo de iteración. Esta forma de operación es muy flexible, puesto que es posible añadir más integradores a fin de obtener otra configuración sin alterar el periodo de iteración. Su principal inconveniente reside en que cada integrador necesita su propio sumador.

En un A.D.D. secuencial los integradores son procesados secuencialmente y en una secuencia fija. El tiempo necesario para procesar un integrador es el periodo de integración. La principal ventaja de esta

forma de operación es que sólo es necesario un sumador y, por tanto es más sencilla y económica.

Naturalmente un A.D.D. simultáneo, para un sistema dado, es mucho más rápido que un A.D.D. secuencial que realice las mismas funciones. Mientras que una frecuencia de iteración típica para una máquina secuencial es de 250 ciclos por segundo, las máquinas dotadas de simultaneidad de operación presentan unas frecuencias de iteración de 100.000 ciclos por segundo.

Un A.D.D. completo para un caso general aparece en la figura 3.3. Antes de iniciar los cálculos se introducen los valores iniciales de  $x$ ,  $y$ ,  $x'$ ,  $y'$ , etc, en los registros correspondientes. Esta configuración se simplifica notablemente si las curvas no son de grado superior a dos, pues entonces  $\Delta x' = \Delta y' = 0$ .

Dado que lo usual en un control numérico de tipo medio es la generación de rectas y arcos de circunferencia, estudiemos más concretamente estos casos particulares.

En el caso de una recta que pasa por el origen las ecuaciones paramétricas son (figura 3.4 ):

$$x = t \cos \theta$$

$$y = t \sin \theta$$

Diferenciando se obtiene:

$$dx = \cos \theta dt$$

$$dy = \sin \theta dt$$

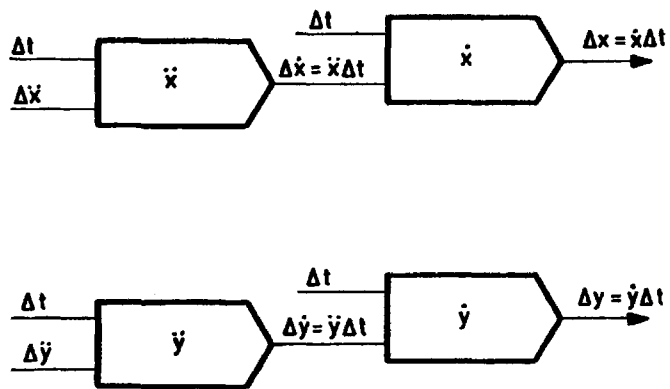


Fig. 3.3

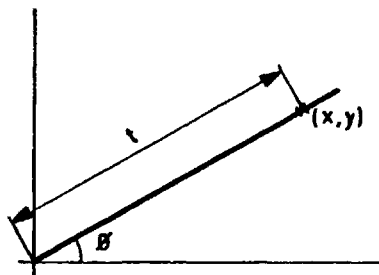


Fig. 3.4

Por tanto, dado que  $\dot{x}$  e  $\dot{y}$  son constantes, una interpolación lineal en el plano puede realizarse por medio de dos "binary rate multipliers" siendo:

$$\dot{x} = \cos \theta$$

$$\dot{y} = \sin \theta$$

ambas constantes.

En el caso de una circunferencia centrada en el origen (figura 3.5), las ecuaciones paramétricas son:

$$x = r \cos \omega t$$

$$y = r \sin \omega t$$

Diferenciando obtenemos:

$$dx = -r\omega \sin \omega t dt$$

$$dy = r\omega \cos \omega t dt$$

Siendo por tanto:

$$\dot{x} = -r\omega \sin \omega t$$

$$\dot{y} = r\omega \cos \omega t$$

Así mismo, y debido al hecho de que:

$$dx = -r\omega^2 \cos \omega t dt = -\omega dy$$

$$dy = -r\omega^2 \sin \omega t dt = \omega dx$$

Poniendo  $\omega = 1/r$  resulta:

$$\dot{x} = -\sin \omega t$$

$$\dot{y} = \cos \omega t$$

de donde la organización del A.D.D. para generación de arcos de circunferencia podría ser el de la figura 3.6.

Las principales ventajas de los A.D.D. son, por una parte, su coste aceptable y, por otra, la gran facilidad con que el método puede extenderse al caso de tres o

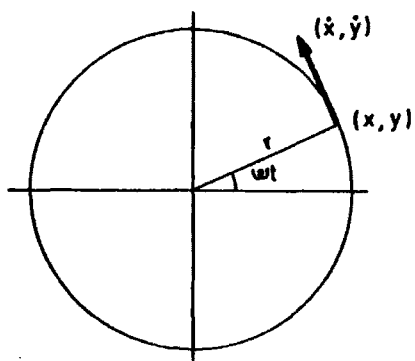


Fig. 3.5

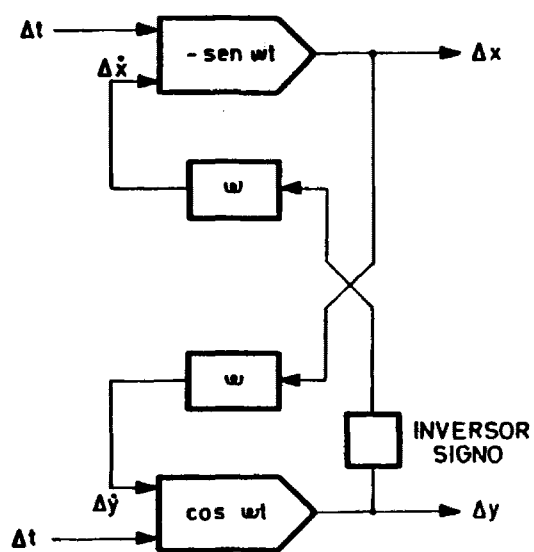


Fig. 3.6

más coordenadas. Sin embargo, los A.D.D. no permiten controlar la velocidad de generación en forma sencilla siendo necesario para ello utilizar circuitos adicionales, como puede ser un acumulador de salida con detector de rebose, que se puede ver en la figura 3.7. Así mismo, la sustitución de  $dx$  y  $dy$  por saltos incrementales finitos introduce errores sistemáticos, los cuales si no tomamos ciertas precauciones a veces difíciles de predecir, pueden provocar degradaciones importantes, incluso utilizando integración trapezoidal.

Estos errores sistemáticos son mayores cuando aumenta el grado de la curva a generar, pudiendo en ciertos casos obtenerse curvas totalmente degradadas.

Estos inconvenientes han motivado la aparición de un nuevo tipo de analizador que utiliza las ecuaciones no paramétricas de la curva y que parece adaptarse mejor a los sistemas digitales. Estos nuevos tipos de analizadores son particularmente adecuados cuando la implementación del analizador se realiza mediante un computador digital (mini o microcomputador).

### 3.3. METODOS NO PARAMETRICOS

Como apuntábamos en el apartado anterior, el proceso de generación de una curva es diferente según se utilicen las ecuaciones paramétricas o las ecuaciones no paramétricas de la misma. Hasta hace algunos años el proceso se realizaba exclusivamente por medio de Analizadores Diferenciales Digitales resolviendo el conjunto



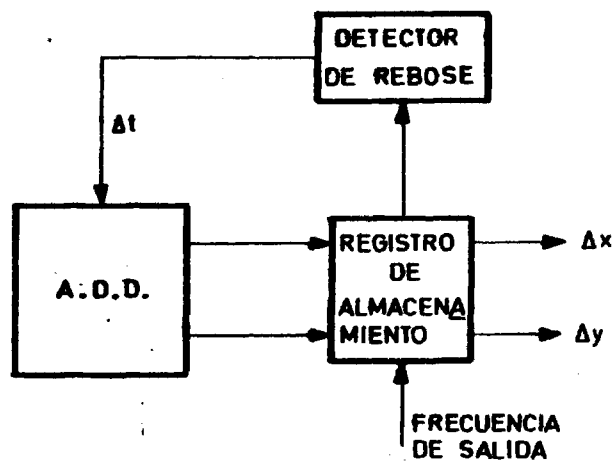


Fig. 3.7

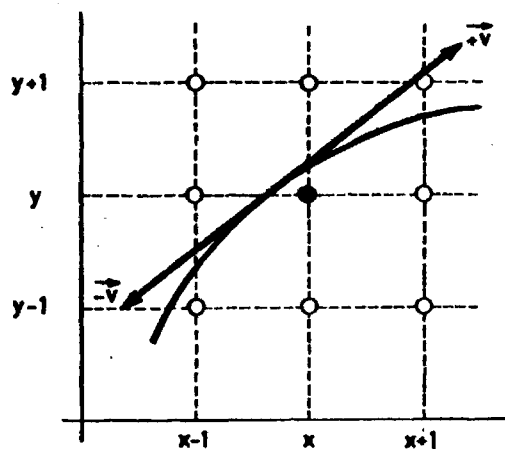


Fig. 3.8

de ecuaciones diferenciales, cuya solución es la curva deseada. Recientemente, sin embargo, el proceso de generación se está comenzando a realizar utilizando las ecuaciones no paramétricas de la curva. Se han desarrollado diferentes algoritmos, especialmente para la generación de rectas y arcos de circunferencia, que son en cierta manera análogos, siendo su característica peculiar el método utilizado para la elección del nuevo punto de la curva generada realmente. Los algoritmos que han sido objeto de nuestro estudio están basados en la simplificación de que, dado un punto cualquiera en el plano, existen ocho posibles direcciones que nos permitirán, aplicando un cierto criterio, elegir el nuevo punto a alcanzar. Estos ocho puntos provienen de cuadricular el plano de tal forma que cada lado de la cuadrícula sea igual a la tolerancia exigida en la generación de la curva. En la figura 3.8 podemos ver una curva, el punto alcanzado y los ocho puntos posibles a alcanzar en el paso siguiente.

Consideremos una curva cualquiera en el plano dada por su ecuación no paramétrica:

$$f(x,y) = 0$$

En lo que sigue supondremos que la función  $f$  es derivable y que los incrementos  $\Delta x$  ó  $\Delta y$  pueden valer solamente  $+1$ ,  $-1$  ó  $0$ .

El propósito de todos los algoritmos es encontrar un conjunto de puntos que se adapten lo más posible a la

curva teórica, pudiendo el punto inicial estar o no situado sobre la misma. En general, aún cuando el punto inicial esté en la curva, los puntos subsiguientes no lo estarán.

El número de puntos posibles de la figura 3.8 que pueden ser alcanzados en el siguiente paso, pueden ser reducidos mediante la introducción de la dirección a lo largo de la cual se genera la curva. Hay dos direcciones posibles en la misma, dadas por los vectores  $+\vec{v}$  y  $-\vec{v}$ , de componentes:

$$+\vec{v} = \left( -\frac{\delta f}{\delta y}, \frac{\delta f}{\delta x} \right) \quad -\vec{v} = \left( \frac{\delta f}{\delta y}, -\frac{\delta f}{\delta x} \right)$$

De acuerdo con la dirección y el cuadrante se pueden definir tres movimientos posibles, es decir, que los ocho puntos posibles se reducen a tres perfectamente definidos. En la figura 3.9 y sobre una circunferencia se pueden ver los posibles movimientos en función de la dirección y del cuadrante.

La elección del punto siguiente se puede hacer según diversos criterios.

Aunque en apartados posteriores se estudian con más detalle algunos de estos métodos, vamos a realizar un análisis previo con la finalidad de conocer si un método es del tipo general o específico para la generación de curvas particulares, justificando en esta comparación la elección de los métodos más interesantes.

Uno de los primeros métodos no paramétricos de generación de curvas es el de Bresenham (BR65), publicado en 1965, y se aplica exclusivamente a la generación de rectas. Aunque posteriormente (BR 77) Bresenham presentó un algoritmo para generar arcos de circunferencia, la generalización de su primer algoritmo a todo tipo de cónicas fué realizado por Pitteway (PI 67) en 1967, teniendo el mérito de haber sido el primero en haber desarrollado un algoritmo lineal para generar cualquier tipo de cónica en el plano.

En 1970 Danielsson (DA 70) publicó un método muy sencillo particularmente adecuado para la generación en el plano de rectas y curvas; pero que presenta el inconveniente de no permitir movimientos simultáneos de ambos ejes, lo que lo hace muy lento en ejecución frente a los otros.

Posteriormente apareció en 1973 un algoritmo muy perfeccionado que permite realizar con gran precisión la interpolación de curvas. Ideado por Jordan, Lennon y Holm (JO73), éste método conduce a unas curvas muy similares a las teóricas. El inconveniente que presenta es que su implementación es muy compleja, esto es, muy costosa si se realiza mediante lógica cableada o muy lenta si es un sistema de programación que corra sobre un computador el resultado de la implementación.

Este algoritmo promovió la réplica de Pitteway en (PI74) y (PI 74a), pero tanto estas nuevas contribuciones como otros métodos publicados y que se -

incluyen en la bibliografía sin referencia expresa, no presentan claras ventajas sobre los anteriormente citados.

### 3.3.1. Método de Jordan, Lennon y Holm

Consiste, en esencia, en localizar para cada punto de la curva, la dirección y el cuadrante que le son propios. Entonces, para hacer el siguiente desplazamiento, se elige como criterio el basado en la minimización de la distancia a la curva teórica. La línea que resulte de la aplicación de este algoritmo será la más próxima a la curva verdadera.

Si definimos los valores de la función  $f$  en los tres puntos próximos posibles (para una dirección y cuadrante dados):

$$f^x = f(x + \Delta x, y)$$

$$f^{xy} = f(x + \Delta x, y + \Delta y)$$

$$f^y = f(x, y + \Delta y)$$

para elegir el próximo punto basta comparar los valores absolutos de esas cantidades.

Por tanto si  $|f^x| < |f^y|$  y  $|f^x| < |f^{xy}|$  el próximo movimiento será en la dirección del eje  $x$ , si  $|f^y| < |f^x|$  y  $|f^y| < |f^{xy}|$  el movimiento será en la dirección del eje  $y$ , y si  $|f^{xy}| < |f^x|$  y  $|f^{xy}| < |f^y|$  se elegirá el desplazamiento hacia el punto  $(x + \Delta x, y + \Delta y)$ .

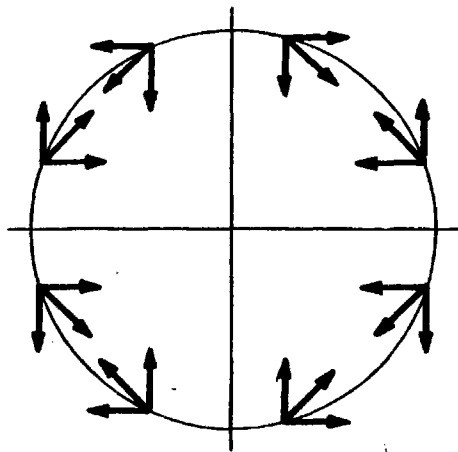


Fig. 3.9

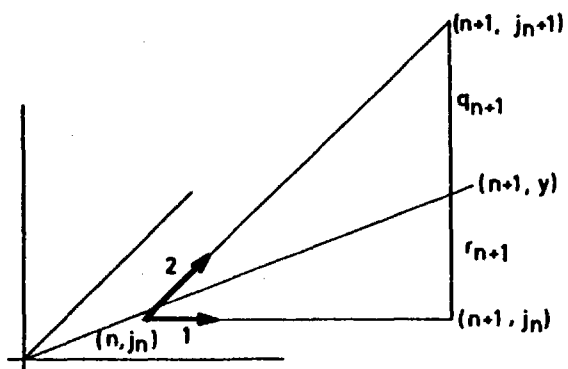


Fig. 3.10

Para la obtención de  $f^x$ ,  $f^y$  y  $f^{xy}$  basta aplicar la fórmula de Taylor.

$$f(x + \Delta x, y + \Delta y) = f(x, y) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \left( \Delta x \frac{\partial}{\partial x} + \Delta y \frac{\partial}{\partial y} \right)^n f(x, y)$$

siendo  $\Delta x$  y  $\Delta y$  igual a +1 ó -1 según el cuadrante y la dirección de la curva y  $f(x, y) = 0$  en el punto inicial.

Una vez elegido el siguiente punto, deberán actualizarse las derivadas parciales de distintos órdenes hasta llegar a las de valor constante. Esta actualización ha de hacerse extensiva a los valores  $f^x$ ,  $f^y$  y  $f^{xy}$ .

Este método de interpolación, totalmente general y fácilmente ampliable a más dimensiones, tiene un coste equiparable al del Analizador Diferencial Digital. El control de velocidad se alcanza más sencillamente, dado que es inherente a su construcción. Así mismo, no hay posibilidad de obtener curvas degeneradas.

Su principal inconveniente es que, frente a otros métodos, resulta muy laborioso: de ser realizado por un sistema de programación, ya que los cálculos a realizar en cada paso elemental son mucho más extensos que los que otros procedimientos ofrecen, aún en el caso de rectas y circunferencias, con el consiguiente deterioro en la velocidad de ejecución.

### 3.3.2. Método de Bresenham y Pitteway

J.E. Bresenham presentó en 1965 un método para usar un trazador de curvas controlado por un computador muy útil para el trazado de rectas y cuya filosofía resumimos a continuación.

Una recta se puede aproximar por movimientos rectos u oblicuos, teniendo cada octante del plano dos que le son propios.

Consideremos la recta del primer octante  $y = \frac{v}{u} x$ , con  $u \geq v \geq 0$ , del primer octante por tanto; cualquier recta de otro octante es reducible al primero, por lo que se estudia éste para mayor simplicidad.

Supongamos que se han realizado  $n$  movimientos. Entonces, en la figura 3.10 el lápiz del trazador se encontrará en la posición  $(n, j_n)$  donde  $0 \leq j_n \leq n$ .

El siguiente movimiento a realizar se escoge de tal manera que la distancia entre la ordenada del nuevo punto y el valor teórico de  $y = \frac{v}{u} x$  para esa abscisa sea mínimo, esto es, se escogerá el punto  $(n+1, j_{n+1})$  de la figura 3.10 si se verifica  $q_{n+1} < r_{n+1}$  y el punto  $(n+1, j_n)$  si  $q_{n+1} > r_{n+1}$ .

El algoritmo para este método es muy breve. Para cada ciclo básico basta efectuar una operación aritmética, una comparación y realizar el movimiento adecuado, aparte, lógicamente, del control de final. Este algoritmo exige la iniciación de varias variables antes de iniciarse el proceso.

La extensión del trabajo de Bresenham al trazado de cónicas fué realizada por M.L.V. Pitteway. Para ello, el procedimiento que se sigue es calcular en cada punto la tangente a la cónica y trasladar así el problema al de la recta resuelto por Bresenham. Naturalmente



el cálculo se hace de forma iterativa, tomando como base la tangente en el punto anterior, y se lleva un control de cambio de octante: cuando éste se produce, hay una reiniciación de parámetros y se cambian los movimientos de salida.

El algoritmo se simplifica enormemente en el caso de circunferencias y deja sin resolver el problema de detectar el final de arco.

#### 3.4. UN METODO LINEAL NO PARAMETRICO PARA GENERACION DE CURVAS.

El problema de abordar el diseño de un control numérico de tipo medio basado en microprocesadores, respondiendo a las fuertes exigencias en tiempo que un sistema de estas características plantea en la función crítica de generación de curvas para operaciones en contorno, nos ha llevado, entre otras, a las siguientes consideraciones:

- Conveniencia de utilizar un método de interpolación no paramétrico, dada su facilidad de implementación mediante un sistema de programación, aprovechando así las posibilidades que el microprocesador ofrece y simplificando, en lo posible, la circuitería externa.
- Conveniencia de efectuar desplazamientos simultáneos en los ejes, para obtener un mejor rendimiento. En efecto, para una velocidad  $V$  programada sobre un eje un método que permita movimientos simultáneos trabajará siempre a una velocidad de salida  $V_s$  sobre la recta a trazar tal que  $V < V_s < V\sqrt{2}$ , mientras que si no existiera la posibilidad de simultanear pulsos se verificaría  $V > V_s > V/\sqrt{2}$ .

- Conveniencia de buscar un ciclo básico de generación de salidas mínimo, dado que existen grandes limitaciones de tiempo, siempre que el procedimiento se mueva dentro de la precisión exigida, aunque para ello haya que prescindir de soluciones más sofisticadas o elegantes. Esta conveniencia exige reducir la elección a sólo dos puntos en lugar de tres, lo cual implica trabajar con octantes.
- Conveniencia de hacer igualmente breve la iniciación de variables y las rutinas de cambio de cuadrante u octante, para facilitar el encadenado de distintas curvas.
- Conveniencia de buscar un criterio de parada lo más sencillo posible con la consiguiente rapidez de las rutinas correspondientes.
- Conveniencia de excluir del tratamiento la mecanización de ejes y rectas que formen ángulos de  $45^\circ$  con los mismos, ya que son las mecanizaciones más frecuentes a efectuar y sólo es preciso controlar adecuadamente el final del tramo, consiguiéndose de esta manera mayor velocidad.
- Conveniencia, finalmente, de lograr un método fácilmente adaptable a tres dimensiones, al menos en rectas, para poder mecanizar ranuras de profundidad variable.

Teniendo en cuenta todas estas consideraciones, se ha obtenido un método que pasamos a describir a continuación, en sus tres apartados de interpolación lineal,

interpolación lineal en el espacio e interpolación circular, presentando finalmente una extensión del método a la generación de cónicas.

#### 3.4.1. Interpolación lineal en el plano

El método que vamos a exponer está pensado para trabajar en el primer octante del plano, esto es, para trazar segmentos cuyo origen es el de coordenadas y cuyo punto final es el  $(x,y)$ , siendo  $x>y>0$ .

Cualquier recta de otro octante es reducible fácilmente al primero, sin más que consultar la Tabla 3.1, donde  $(X_A, Y_A)$  son las coordenadas del punto final del segmento a generar. Los ejes y las rectas que forman ángulos de  $45^\circ$  con ellos se excluyen del tratamiento por lo visto anteriormente.

Será preciso, pues, al comenzar una generación de un segmento rectilíneo el efectuar una traslación de los ejes al origen del segmento y una reducción del mismo al primer octante de acuerdo con la Tabla 3.1.

La salida del interpolador en cada ciclo será un vector de cuatro bits con la estructura  $(X+Y-Y+Y-)$  de los que, para cada segmento, dos serán siempre cero. Esta configuración permite desplazar la máquina-herramienta en cualquier dirección y sentido. Hemos de hacer notar que, en realidad, el vector de salida, que denominamos vector característico, sería de la forma  $(X+ X- Y+ Y- Z+ Z-)$  ya que se trabaja con tres ejes pero reducimos el estudio al plano  $xy$  a efectos de simplificar la exposición. Los dos bits correspondientes

al eje perpendicular al plano de trabajo serán siempre iguales a cero.

Como se puede apreciar en la Tabla 3.1, a cada octante se le asocian dos vectores característicos, uno correspondiente a movimiento simple y otro a movimiento doble, esto es, a desplazamientos simultáneos en ambos ejes.

T A B L A 3.1  
Tabla de reducción al primer octante

<u>Condición</u>	<u>octante</u>	<u>X</u>	<u>Y</u>	<u>V.C. doble</u>	<u>V.C. simple</u>
$X_A > Y_A > 0$	1	$X_A$	$Y_A$	(1010)	(1000)
$Y_A > X_A > 0$	2	$Y_A$	$X_A$	(1010)	(0010)
$Y_A > 0 > X_A$ y $Y_A > -X_A$	3	$Y_A$	$-X_A$	(0110)	(0010)
$Y_A > 0 > X_A$ y $Y_A < -X_A$	4	$-X_A$	$Y_A$	(0110)	(0100)
$0 > Y_A > X_A$	5	$-X_A$	$-Y_A$	(0101)	(0001)
$0 > X_A > Y_A$	6	$-Y_A$	$-X_A$	(0101)	(0100)
$X_A > 0 > Y_A$ y $-Y_A > X_A$	7	$-Y_A$	$X_A$	(1001)	(0001)
$X_A > 0 > Y_A$	8	$X_A$	$-Y_A$	(1000)	(1000)

Consideremos pues, el segmento de la figura 3.11, reducción al primer octante de cualquier segmento. Lo podemos aproximar mediante desplazamientos según el eje x (salida en x), o bien por desplazamientos según la bisectriz del primer cuadrante (salida en x y en y).

La ecuación implícita no paramétrica de la recta es  $f(x,y)=bx-ay=0$ , y consideremos la función  $\Delta = f(x,y)=0$  sobre la recta a generar.

Estamos intentando buscar un algoritmo que nos indique en cada desplazamiento a efectuar si es conveniente hacerlo según la bisectriz del primer cuadrante o bien según el eje  $x$  y para ello nos vamos a apoyar en el valor de la función  $\Delta$  en cada instante. Este valor  $\Delta$  deberá ser actualizado cada vez que se realice un movimiento.

El valor de una función en un punto próximo viene dado por la fórmula de Taylor, que en este caso se reduce a:

$$\begin{aligned} f(x + \Delta x, y + \Delta y) &= f(x, y) + \frac{\delta f(x, y)}{\delta x} \Delta x + \frac{\delta f(x, y)}{\delta y} \Delta y = \\ &= f(x, y) + b \Delta x - a \Delta y \end{aligned}$$

Consideremos que estamos en el paso  $i$  sobre la recta a generar, con lo que  $\Delta_i = 0$ ; si realizamos un desplazamiento unidad según el eje (siendo el desplazamiento unidad igual a la resolución del sistema) será  $\Delta x = 1$ ,  $\Delta y = 0$ , y por tanto:

$$f(x+1, y) = f(x, y) + b$$

y el nuevo valor de  $\Delta$  será:

$$\Delta_{i+1} = \Delta_i + b > 0 \text{ ya que } b > 0$$

Como hemos partido de un punto situado en la recta, al realizar un movimiento según el eje estaremos

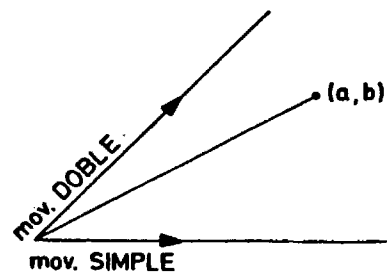


Fig. 3.11

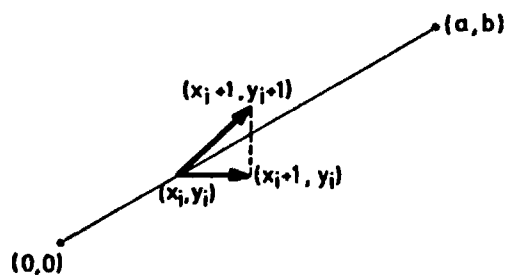


Fig. 3.12

ahora "por debajo" de ella, como se ve en la figura 3.12, luego para buscar la trayectoria teórica realizaremos el próximo movimiento según la bisectriz.

Si por el contrario, y partiendo de la recta, realizamos un desplazamiento según la bisectriz del primer cuadrante, tendremos:  $\Delta x=1$ ,  $\Delta y=1$ , y en consecuencia:

$$f(x + 1, y + 1) = f(x, y) + (b - a)$$

Llamando  $A = b - a$ , tenemos para el nuevo valor de  $\Delta$  en este caso:

$$\Delta_{i+1} = \Delta_i + A < 0 \quad \text{ya que } a > b \text{ en el primer octante}$$

Y al haber partido de la recta, y haber realizado ese movimiento, estaremos "encima" de la recta a generar y, buscando la trayectoria correcta, el siguiente movimiento se realizaría en la dirección del eje x.

Es por tanto el signo de la función  $\Delta$  el que indica si el próximo movimiento deberá ser el simple o el doble.

La secuencia de movimientos elementales así descritos tiene la ventaja de que ha de realizarse "a" veces exactamente, siendo "a" el valor de la abscisa del punto a alcanzar, ya que siempre hay componente de avance según el eje, lo que simplifica el control de fin de tramo.

De acuerdo con todo lo anterior, un posible organigrama para la generación de segmentos rectilíneos, podría ser el de la figura 3.13.

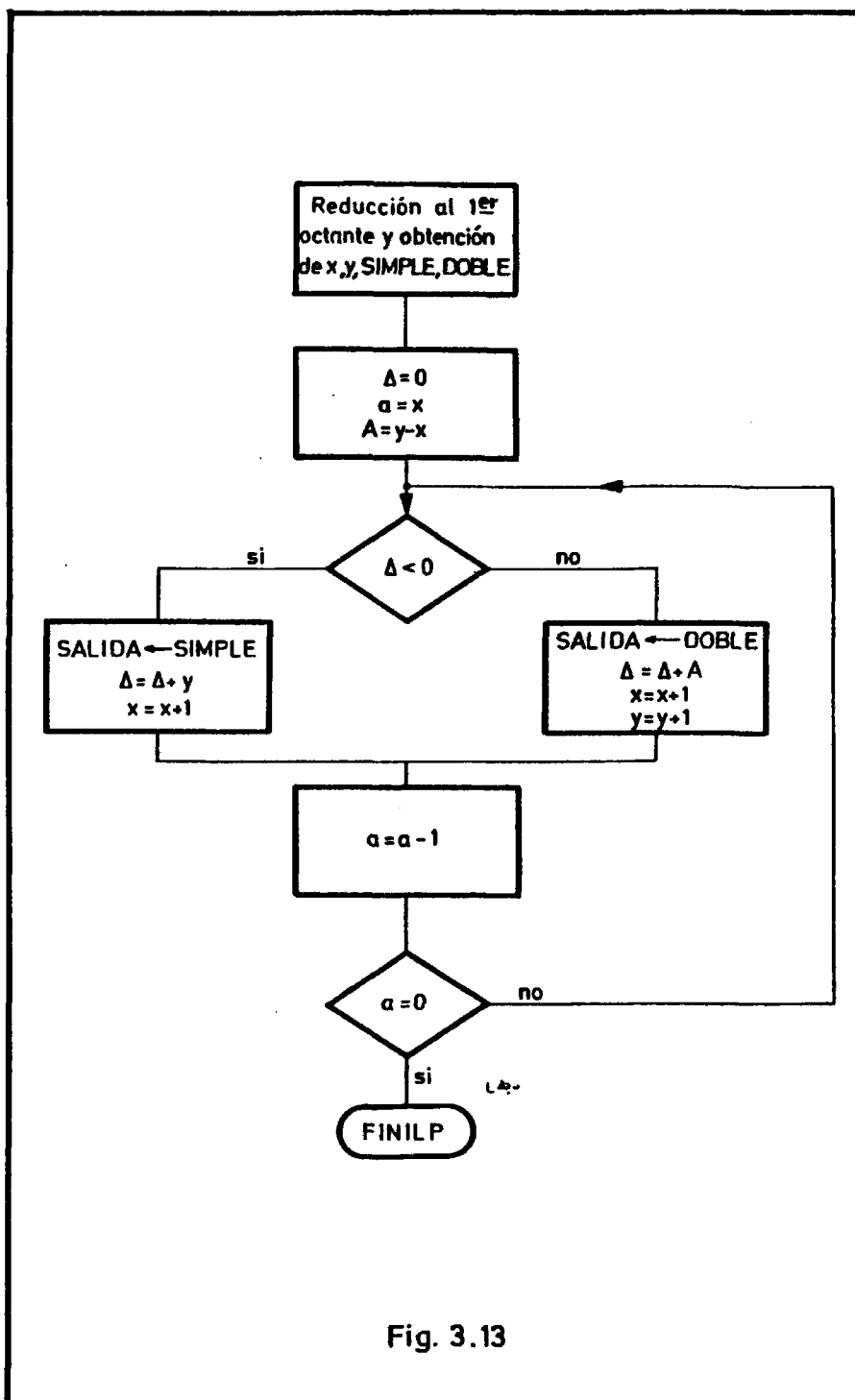


Fig. 3.13



Dado que el trazado de ejes y rectas que forman ángulos de  $45^\circ$  con ellos está excluido del proceso de interpolación, no hay problema en que en ese organigrama, la salida (donde  $\Delta=0$ ) se haga siempre con movimientos simultáneos. Igual sería hacerlo con salida sobre el eje (consideración del cero como número negativo), pues siempre se alcanzará el punto (a,b) y en ningún momento la distancia de la trayectoria quebrada a la recta teórica es superior a la resolución, como se ve en la figura 3.14, en la que se plasman los resultados del siguiente ejemplo de aplicación del método, en que se va del punto (0,0) al (7,5) siendo por tanto  $x=5$  y  $A=-2$  los valores de entrada al organigrama.

<u>Paso</u>	<u>X</u>	<u>Y</u>	<u>A</u>	<u>Movimiento</u>
1	0	0	0	DOBLE
2	1	1	-2	SIMPLE
3	2	1	+3	DOBLE
4	3	2	+1	DOBLE
5	4	3	-1	SIMPLE
6	5	3	+4	DOBLE
7	6	4	+2	DOBLE
	7	5	0	

Como se ve, se alcanza el punto final sobre la recta teórica, y por tanto  $\Delta=0$  en ese instante.

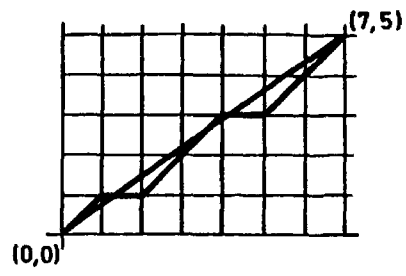


Fig. 3.14

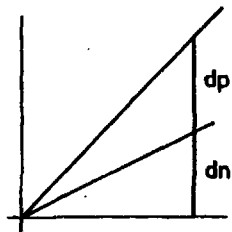


Fig. 3.15

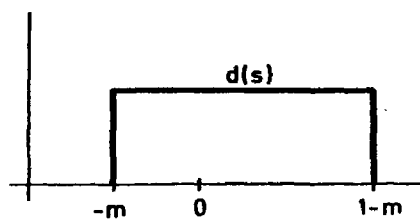


Fig. 3.16

#### 3.4.1.1. Estudio de errores

Puesto que toda recta es reducible al primer octante, haremos el estudio en éste de la separación máxima y la separación cuadrática media, entre los vértices de la poligonal por la que se aproxima una recta teórica con el método propuesto y la recta misma.

Dada una recta de pendiente  $m$ ,  $m < 1$ , la máxima separación positiva se obtiene (figura 3.15) en el sucesor de un punto de la poligonal muy próximo a la recta teórica y debajo de ella; en el paso siguiente, la distancia a la recta podemos considerarla como  $d_p$  (en realidad es algo menor) y vale  $d_p < 1-m$ .

Análogamente, la máxima separación negativa ocurrirá en el sucesor de un punto de la poligonal muy próximo, por encima, a la recta teórica; el algoritmo originará un desplazamiento según el eje y la distancia será entonces  $d_n > -m$ , tomando siempre la resolución del sistema como unidad de longitud.

Con el fin de calcular la densidad de probabilidades del error supondremos, como es lógico y de acuerdo con la experiencia (figura 3.16) que la probabilidad de encontrar una separación  $s$  es constante. Entonces la densidad de probabilidad es:

$$\begin{aligned} d(s) &= 0 && \text{para } s \leq -m \\ d(s) &= K && \text{" } -m < s < 1-m \\ d(s) &= 0 && \text{" } s \geq 1-m \end{aligned}$$

$$\text{luego: } \int_{-\infty}^{\infty} d(s) \, ds = K \int_{-m}^{1-m} ds = 1 = K$$

por tanto  $K = 1$

Y en cuanto al error cuadrático medio, su valor será:

$$\begin{aligned} \epsilon^2 &= \int_{-\infty}^{\infty} x^2 d(x) dx = \int_{-m}^{1-m} x^2 dx = \left[ \frac{x^3}{3} \right]_{-m}^{1-m} = \\ &= \frac{(1-m)^3 + m^3}{3} = \frac{1-m^3 + 3m^2 - 3m + m^3}{3} = m^2 - m + 1/3 \end{aligned}$$

función por tanto, de la pendiente de la recta, que es mínimo para  $m = 1/2$ , que corresponde a un ángulo de  $26,5^\circ$  y es  $\epsilon = 0.288$ , siendo máximo para  $m=0$  y  $m=1$ , que vale  $\epsilon = 0.577$ .

En la tabla 3.2, aparecen los resultados para un rango de pendientes comprendidos entre 0 y 1, en que se ven los valores estadísticos frente a los valores teóricos y que se reflejan gráficamente en la figura 3.17.

#### 3.4.2. Interpolación lineal en el espacio

Los temas relacionados con el control numérico suelen estar sometidos al secreto industrial, por lo que no es fácil el encontrar referencias bibliográficas lo suficientemente explícitas. En el caso de generación de curvas en el plano se han localizado métodos desarrollados para periféricos de computador (lápices trazadores sobre papel, pantallas gráficas, etc) principalmente, que se pueden aplicar al control numérico de máquinas-herramienta para contorneos en dos dimensiones, pero el problema de pasar al espacio de tres dimensiones no está apenas tratado.

TABLA DE ERRORES CUADRATICOS MEDIOS(ECM)

PENDIENTE RECTA	ECM ESTADISTICO	ECM TEORICO
0.10000	0.49339	0.49337
0.20000	0.41641	0.41641
0.30000	0.35124	0.35125
0.40000	0.30553	0.30554
0.50000	0.28867	0.28868
0.60000	0.30545	0.30547
0.70000	0.35111	0.35113
0.80000	0.41623	0.41626
0.90000	0.49318	0.49321
1.00000	0.57722	0.57726

TABLA 3.2

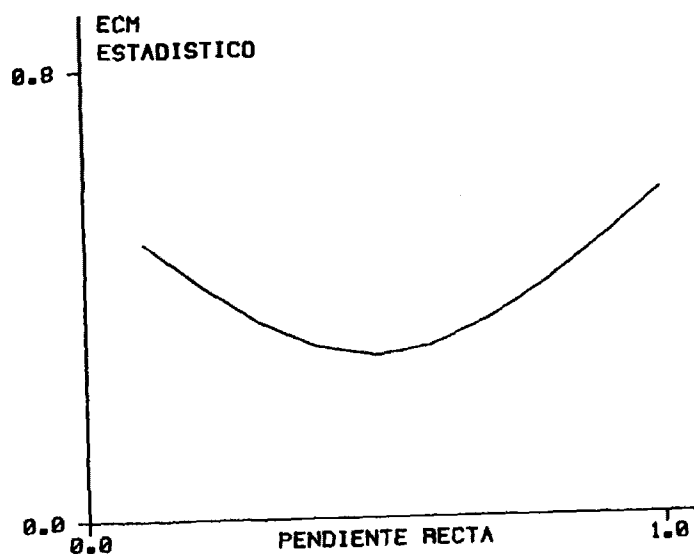


FIG 3.17

El algoritmo que se presenta en este apartado, aplicable para la mecanización de ranuras de profundidad linealmente variable, es una extensión del propuesto para dos dimensiones. Para ello, reduciremos cualquier segmento del espacio a uno que tenga por origen el de coordenadas y por final el  $(X_N, Y_N, Z_N)$ , con  $X_N > Y_N > 0$  y  $X_N > Z_N > 0$ . El caso  $X_N = Y_N = Z_N$  se apartará del tratamiento general ya que bastará señalar referencias idénticas para los tres ejes, así como el trazado de segmentos contenidos en un plano coordenado, que se resolverá, lógicamente, por el método de interpolación lineal en el plano expuesto en 3.4.1.

La salida del sistema al fin de cada ciclo básico será un vector de seis bits con la configuración  $(X+ X- Y+ Y- Z+ Z-)$ , existiendo en el mismo entre uno y tres bits con valor 1, ya que aquí también se exige la ejecución, cuando sea posible, de movimientos simultáneos en 2 ó 3 ejes a efectos de incrementar la velocidad de generación.

La Tabla 3.3 es la de reducción de cualquier segmento de origen  $(0,0,0)$  y final  $(X,Y,Z)$  de uno de los 24 subespacios en que dividimos el espacio de tres dimensiones al subespacio en que  $X_N > Y_N > 0$  y  $X_N > Z_N > 0$  del primer octante de la esfera, que llamaremos subespacio 1, con los vectores característicos SIMPLE, DOBLE1 y DOBLE2 que utiliza el algoritmo, y que se han definido de manera que sus posibles sumas binarias produzcan las diferentes salidas posibles, esto es, refiriéndonos al subespacio 1 tenemos:

T A B L A 3.3

Tabla de reducción de segmentos en el espacio

<u>Octante</u>	<u>Valor</u>	<u>Condición</u>	<u>X<sub>N</sub></u>	<u>Y<sub>N</sub></u>	<u>Z<sub>N</sub></u>	<u>SIMPLE</u>	<u>DOBLE1</u>	<u>DOBLE2</u>
1	X>0,Y>0,Z>0	X > Y, X > Z	X	Y	Z	(100000)	(001000)	(000010)
		Y > X, Y > Z	Y	X	Z	(001000)	(100000)	(000010)
		Z > X, Z > Y	Z	Y	X	(000010)	(001000)	(100000)
2	X<0,Y>0,Z>0	-X > -Y, -X > Z	-X	Y	Z	(010000)	(001000)	(000010)
		Y > -X, Y > Z	Y	-X	Z	(001000)	(010000)	(000010)
		Z > X, Z > Y	Z	Y	-X	(000010)	(001000)	(010000)
3	X<0,Y<0,Z>0	-X > -Y, -X > Z	-X	-Y	Z	(010000)	(000100)	(000010)
		-Y > X, -Y > Z	-Y	-X	Z	(000100)	(010000)	(000010)
		Z > -Y, Z > -X	Z	-Y	-X	(000010)	(000100)	(010000)
4	X>0,Y<0,Z>0	X > -Y, X > Z	X	-Y	Z	(100000)	(000100)	(000010)
		-Y > X, -Y > Z	-Y	X	Z	(000100)	(100000)	(000010)
		Z > X, Z > -Y	-Z	X	Y	(000010)	(000100)	(100000)
5	X>0,Y>0,Z<0	X > Y, X > -Z	X	Y	-Z	(100000)	(001000)	(000001)
		Y > X, Y > -Z	Y	X	-Z	(001000)	(100000)	(000001)
		-Z > X, -Z > Y	-Z	Y	X	(000001)	(001000)	(100000)

<u>Octante</u>	<u>Valor</u>	<u>Condición</u>	<u>X<sub>N</sub></u>	<u>Y<sub>N</sub></u>	<u>Z<sub>N</sub></u>	<u>SIMPLE</u>	<u>DOBLE1</u>	<u>DOBLE2</u>
6	X < 0, Y > 0, Z < 0	-X > Y, -X > -Z	-X	Y	-Z	(010000)	(001000)	(000001)
		Y > -X, Y > -Z	Y	-X	-Z	(001000)	(010000)	(010000)
		-Z > -X, -Z > Y	-Z	Y	-X	(000001)	(001000)	(010000)
7	X < 0, Y < 0, Z < 0	-X > -Y, -X > -Z	-X	-Y	-Z	(010000)	(000100)	(000001)
		-Y > -X, -Y > -Z	-Y	-X	-Z	(000100)	(010000)	(000001)
		-Z > -X, -Z > -Y	-Z	-Y	-Z	(000001)	(000100)	(010000)
8	X > 0, Y < 0, Z > 0	X > -Y, X > -Z	X	-Y	-Z	(100000)	(000100)	(000001)
		-Y > X, -Y > Z	-Y	X	-Z	(000100)	(100000)	(000001)
		-Z > X, -Z > -Y	-Z	-Y	X	(000001)	(100000)	(100000)



```

SALIDA = SIMPLE      produce salida en x(mov. simple)
SALIDA=SIMPLE+DOBLE1  "      "      " x,y(primer mov. doble)
SALIDA=SIMPLE+DOBLE2  "      "      " x,z(segundo mov.doble)
SALIDA=SIMPLE+DOBLE1+DOBLE2"      "      " x,y,z(mov. triple)

```

Una vez reducido el problema a la generación del segmento de origen (0,0,0) y final ( $X_N$ ,  $Y_N$ ,  $Z_N$ ) del subespacio 1, consideremos sus ecuaciones:

$$\frac{x}{X_N} - \frac{y}{Y_N} - \frac{z}{Z_N}$$

a partir de las cuales podemos definir la recta como intersección de dos planos:

$$Y_N x - X_N y = 0$$

$$Z_N x - X_N z = 0$$

que se pueden tomar individualmente como las ecuaciones de las proyecciones de la recta a generar sobre los planos XY y XZ. Además, en cada uno de ellos se verifica que  $X_N$  es mayor que la coordenada correspondiente al otro eje. El problema, entonces, se puede reducir a aplicar, sucesivamente y en cada ciclo básico, el método de interpolación lineal en el plano propuesto en el apartado anterior, componiendo los resultados parciales en cada proyección para obtener la salida de ese ciclo.

Definiremos para cada proyección, dos variables  $\Delta_1$

y  $\Delta_2$ , que se actualizarán para cada iteración según el desplazamiento que haya tenido lugar en la proyección correspondiente y cuyo signo nos indicará, en la iteración próxima, el desplazamiento parcial a efectuar.

Para ilustrar el proceso a seguir, podemos introducir dos variables booleanas F y G de la forma siguiente:

$$\begin{array}{ll} F=1 & \text{si } \Delta_1 \geq 0 \\ G=1 & \text{si } \Delta_2 \geq 0 \end{array}$$

Por tanto, el desplazamiento triple, cuyo vector característico de salida en el subespacio 1 es (101010) verifica la ecuación booleana:

$$x \text{ y } z = FG$$

Los dos movimientos dobles-salida en x,y y en x,z-tendrán como vectores característicos de salida (1 0 1 0 0 0) y (1 0 0 0 1 0); las ecuaciones booleanas correspondientes serían:

$$\begin{array}{l} xz = FG \\ xy = F\bar{G} \end{array}$$

Análogamente, el movimiento simple tendría como vector característico de salida (1 0 0 0 0 0) y en este caso:

$$x = F\bar{G}$$

Se ha de notar que, al realizarse siempre desplazamiento en el eje x, el control de final es inmediato, ya que el ciclo básico habrá de ejecutarse  $X_N$  veces.

Según todo lo expuesto, un posible organigrama para la generación de rectas en el espacio sería el de la figura 3.18, que podemos aplicar al siguiente ejemplo, segmento que partiendo de (0,0,0) ha de finalizar en (5,4,3).

Las ecuaciones de la recta serán:

$$\frac{x}{5} = \frac{y}{4} = \frac{z}{3}$$

y las ecuaciones de la proyecciones de la misma:

$$4x - 5y = 0$$

$$3x - 5z = 0$$

luego los valores de entrada al organigrama serán:

$$\Delta_1=0, \Delta_2=0, Y=4, Z=3, A1=-1, A2=-2, XFI = 5$$

y por tanto los valores de las distintas variables en cada paso serían:

PASO	$\Delta_1$	$\Delta_2$	SALIDA	F	G	X	Y	Z
1	0	0	(101010)	1	1	0	0	0
2	-1	-2	(100000)	0	0	1	1	1
3	3	1	(101010)	1	1	2	1	1
4	2	-1	(101010)	1	0	3	2	2
5	1	2	(101010)	1	1	4	3	2
	0	0				5	4	3

### 3.4.3. Interpolación circular

La generación de circunferencias y, más frecuentemente de arcos de circunferencia es, junto con

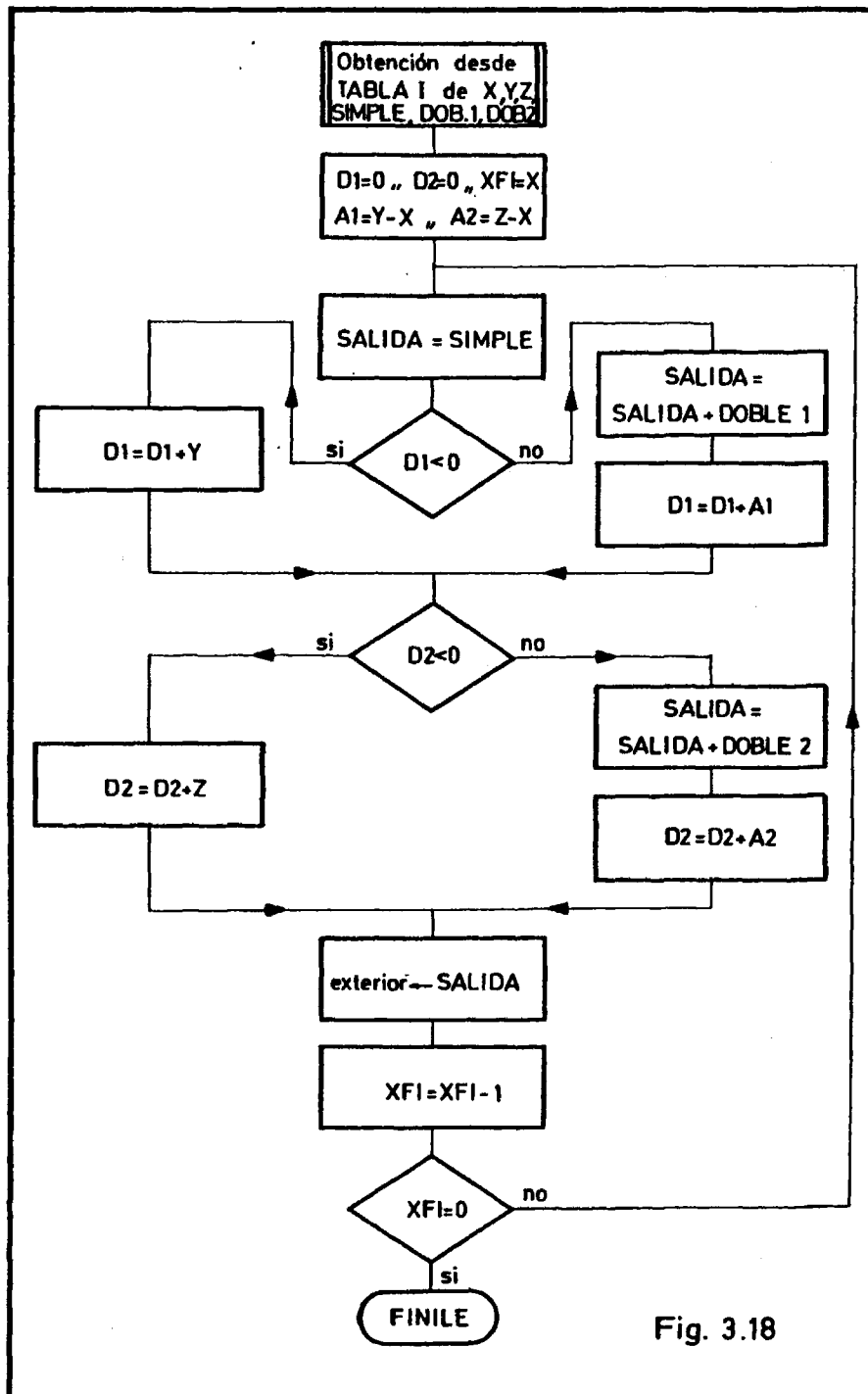


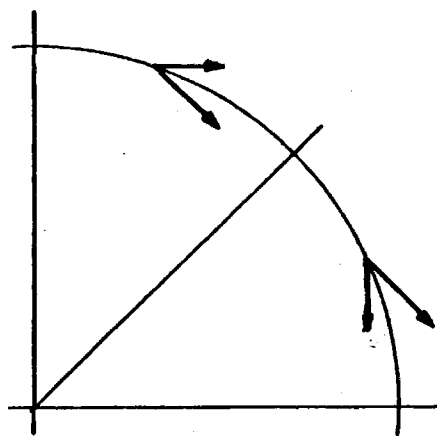
Fig. 3.18

la generación de rectas, la tarea de contorno más habitual en un control numérico de tipo medio.

El algoritmo que proponemos para realizar esta función se ha obtenido usando la misma metodología que en el caso del segmento rectilíneo, y es válido para generar cualquier arco de circunferencia recorrido en cualquier sentido, bien de las agujas del reloj (AR), bien contrario a este (CAR).

Consideremos la circunferencia o arco de circunferencia que satisface la ecuación no paramétrica  $x^2 + y^2 - R^2 = 0$ , y definamos la función  $\Delta = \Delta(x,y)$  tal que es nula sobre la circunferencia, negativa en los puntos interiores y positiva en los puntos exteriores a la misma.

El método de trabajo será el de asimilar el trazado de cualquier octante de la circunferencia al de uno de los octantes del primer cuadrante, recorridos en sentido AR, con procedimientos distintos para el primer octante y el segundo, dado que los movimientos elementales son diferentes en uno y otro tal como se ve en la figura 3.19. Podríamos, pues, clasificar los octantes de la circunferencia en octantes que finalizan en una bisectriz y octantes que finalizan en un eje, siendo el sentido del recorrido primordial por tanto para establecer esa clasificación. Esta división en dos octantes tiene varias ventajas. En primer lugar, como ya se ha indicado, sólo existen dos posibles salidas dentro de un octante; en segundo, los incrementos de los distintos parámetros, como se verá más adelante, son fijos para cada tipo de octante, con lo que las transferencias entre las rutinas



**MOVIMIENTOS ELEMENTALES EN EL  
PRIMER CUADRANTE SENTIDO AR**

**Fig.-3.19**

que generan uno y otro, son mínimas; por otra parte, la dirección de mayor crecimiento es distinta en cada tipo de octante, lo que hace que el control de final, tanto de octante, como de arco, sea distinto en un caso u otro.

Se comenzará la generación sobre un punto de la trayectoria teórica y en cada ciclo básico se calculará el valor de  $\Delta(x,y)$  para generar el desplazamiento siguiente.

Si  $\Delta < 0$  estaremos dentro de la trayectoria teórica, intentando ir "fuera" en el próximo desplazamiento, realizando el movimiento adecuado; por el contrario, si  $\Delta > 0$  estaremos "fuera" de la trayectoria teórica e intentaremos pasar al interior de la circunferencia en el próximo desplazamiento.

Consideremos separadamente lo que sucede en cada uno de los dos octantes. El valor de la función  $f(x,y)=x^2+y^2-R^2=0$  en un punto próximo viene dada por el desarrollo en serie de Taylor:

$$f(x+\Delta x, y+\Delta y) = f(x, y) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \left( \Delta x \frac{\partial}{\partial x} + \Delta y \frac{\partial}{\partial y} \right)^n f(x, y) =$$

$$= f(x, y) + 2x \Delta x + 2y \Delta y + \frac{1}{2} \{ 2(\Delta x)^2 + 2(\Delta y)^2 \}$$

Para el primer octante de circunferencia, tenemos como posibles valores de los incrementos:

$\Delta x=0$ ,  $\Delta y=-1$  en el caso de movimiento simple

$\Delta x=1, \Delta y=-1$  " " " " " doble.

En el primer caso:

$$f(x, y-1) = f(x, y) - 2y + 1 = f(x, y) + S \quad \text{con } S = -2y + 1$$

y para el segundo:

$$f(x+1, y-1) = f(x, y) + 2(x-y+1) = f(x, y) + D \text{ con } D = 2 \cdot (x-y+1)$$

En el caso de haberse realizado movimiento simple,  $y_{i+1} = y_i - 1$ , los valores de S y D deberán actualizarse de acuerdo con los resultados anteriores como sigue:

$$S_{i+1} = -2(y_i - 1) + 1 = S_i + 2$$

$$D_{i+1} = 2 \cdot (x - (y_i - 1) + 1) = D_i + 2$$

y en cuanto a la función  $\Delta$  :

$$\Delta_{i+1} = \Delta_i + S_i$$

Si el movimiento realizado hubiera sido el doble, la actualización será:

$$S_{i+1} = -2(y_i - 1) + 1 = S_i - 2$$

$$D_{i+1} = 2((x_i + 1) - (y_i - 1) + 1) = D_i + 4$$

siendo la función  $\Delta$  actualizada en este caso de la forma:

$$\Delta_{i+1} = \Delta_i + D_i$$

En cuanto al segundo octante, siempre en sentido AR, los valores de los incrementos serán:

$\Delta x=1, \Delta y=0$  en el caso de movimiento simple

$\Delta x=1, \Delta y=-1$       "    "      "    "      "      doble

Si hubiera habido movimiento simple, el valor de la función  $f$  (y el de la función  $\Delta$  que hemos definido)



quedaría como sigue:

$$f(x+1,y) = f(x,y)+2x+1 = f(x,y) + S \quad \text{con } S=2x+1$$

y en el caso de movimiento doble:

$$f(x+1, y-1)=f(x,y) +2(x-y+1)=f(x,y)+D \text{ con } D=2(x-y+1)$$

La actualización de variables en este segundo octante será la siguiente: para movimiento simple:

$$S_{i+1}=2(x_{i+1})+1 = S_i+2$$

$$D_{i+1}=2((x_{i+1})-y_{i+1})=D_i+2$$

siendo la función  $\Delta$  actualizada en este caso de la forma:

$$\Delta_{i+1} = \Delta_i + S$$

En el caso de haberse realizado un movimiento doble las actualizaciones se realizarían como sigue:

$$S_{i+1} = 2(x_{i+1})+1 = S_i+2$$

$$D_{i+1} = 2((x_{i+1})-(y_{i+1})+1) = D_i+4$$

$$\Delta_{i+1} = \Delta_i + D$$

Un arco de circunferencia quedará definido mediante un punto inicial  $(X_I, Y_I)$  que coincidirá con las coordenadas del útil de la máquina-herramienta, su punto final  $(X_F, Y_F)$ , las coordenadas del centro y el sentido de recorrido.

Una vez realizada la traslación de los ejes al centro de la circunferencia, el octante final y el inicial se determinan consultando la Tabla 3.4.

T A B L A 3.4

Determinación del octante al que pertenece el punto (x,y)

<u>CONDICION</u>	<u>OCTANTE</u>
$x > y \geq 0$	1
$y \geq x \geq 0$	2
$y > x \geq 0$	3
$-x > y > 0$	4
$-x > -y \geq 0$	5
$-y \geq -x > 0$	6
$-y > x \geq 0$	7
$x \geq -y > 0$	8

T A B L A 3.5

Cambios de octante (reducción al 1<sup>er</sup> cuadrante AR)

<u>Octante</u>	<u>Sentido</u>	<u>Reducido a AR</u>	<u>X<sub>N</sub></u>	<u>Y<sub>N</sub></u>	<u>V.C DOBLE</u>	<u>V.C. SIMPLE</u>
1	AR	1	X	Y	(1001)	(0001)
2	"	2	X	Y	(1001)	(1000)
3	"	1	Y	-X	(1010)	(1000)
4	"	2	Y	-X	(1010)	(0010)
5	"	1	-X	-Y	(0110)	(0010)
6	"	2	-X	-Y	(0110)	(0100)
7	"	1	-Y	X	(0101)	(0100)
8	"	2	-Y	X	(0101)	(0001)
1	CAR	2	Y	X	(0110)	(0001)
2	"	1	Y	X	(0110)	(0100)
3	"	2	-X	Y	(0101)	(0100)
4	"	1	-X	Y	(0101)	(0001)
5	"	2	-Y	-X	(1001)	(0001)
6	"	1	-Y	-X	(1001)	(1000)
7	"	2	X	-Y	(1010)	(1000)
8	"	1	X	-Y	(1010)	(0010)

El número de cambios de octante entre el inicial y el final NCO, se puede calcular de la siguiente manera, siendo NF el octante del punto final, NI el del inicial y S el sentido.

- 1.- Si  $NF < NI$  entonces  $NF = NF + 8$
- 2.-  $NCO = NF - NI$
- 3.- Si S es AR entonces  $NCO = 8 - NCO$

Una reducción del octante real al primero o segundo recorridos en el sentido de las agujas del reloj se hace consultando la tabla 3.5, donde se conservan las notaciones de la recta. Cuando se describe un octante, el fin del mismo se detecta por la condición  $x \geq y$  en el segundo y por  $y < 0$  en el primero. Cuando se entra en el último octante a generar se ha de realizar un control sobre el punto de parada, variando de un octante a otro la coordenada a controlar, que es aquella en que siempre hay desplazamiento.

Todo lo anterior queda plasmado en el organigrama de la figura 3.20, donde se presentan dos rutinas para dos tipos de octantes a recorrer, la primera para el primer octante y la segunda para el segundo. Ambas rutinas son muy similares, pero las constantes para la actualización de las diversas variables y el control de final son distintos. Se podría haber dispuesto una única rutina algo más compleja, pero se proponen dos distintas con miras a acortar en lo posible el tiempo de ejecución, tanto en iniciación como en el ciclo básico de generación, a cambio de precisar muy poca más

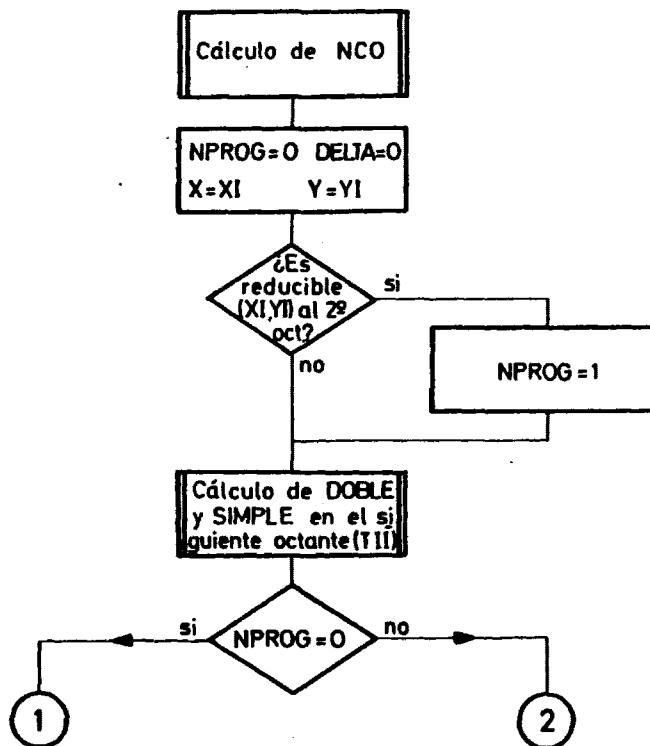


Fig. 3.20 (a)

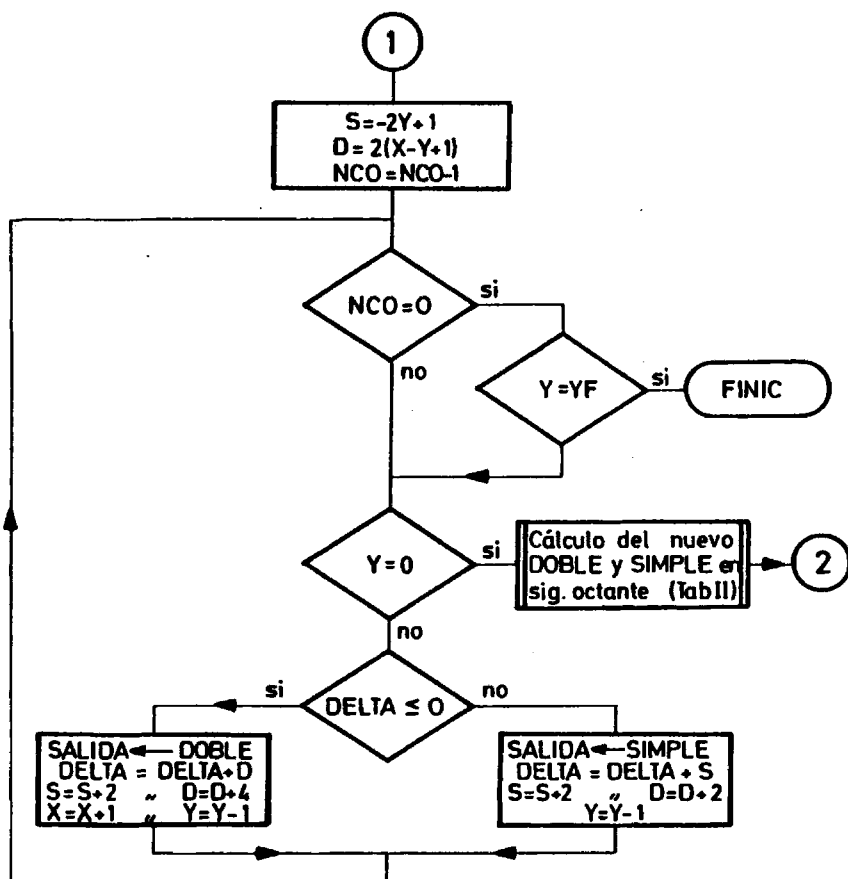


Fig. 3.20 (b)

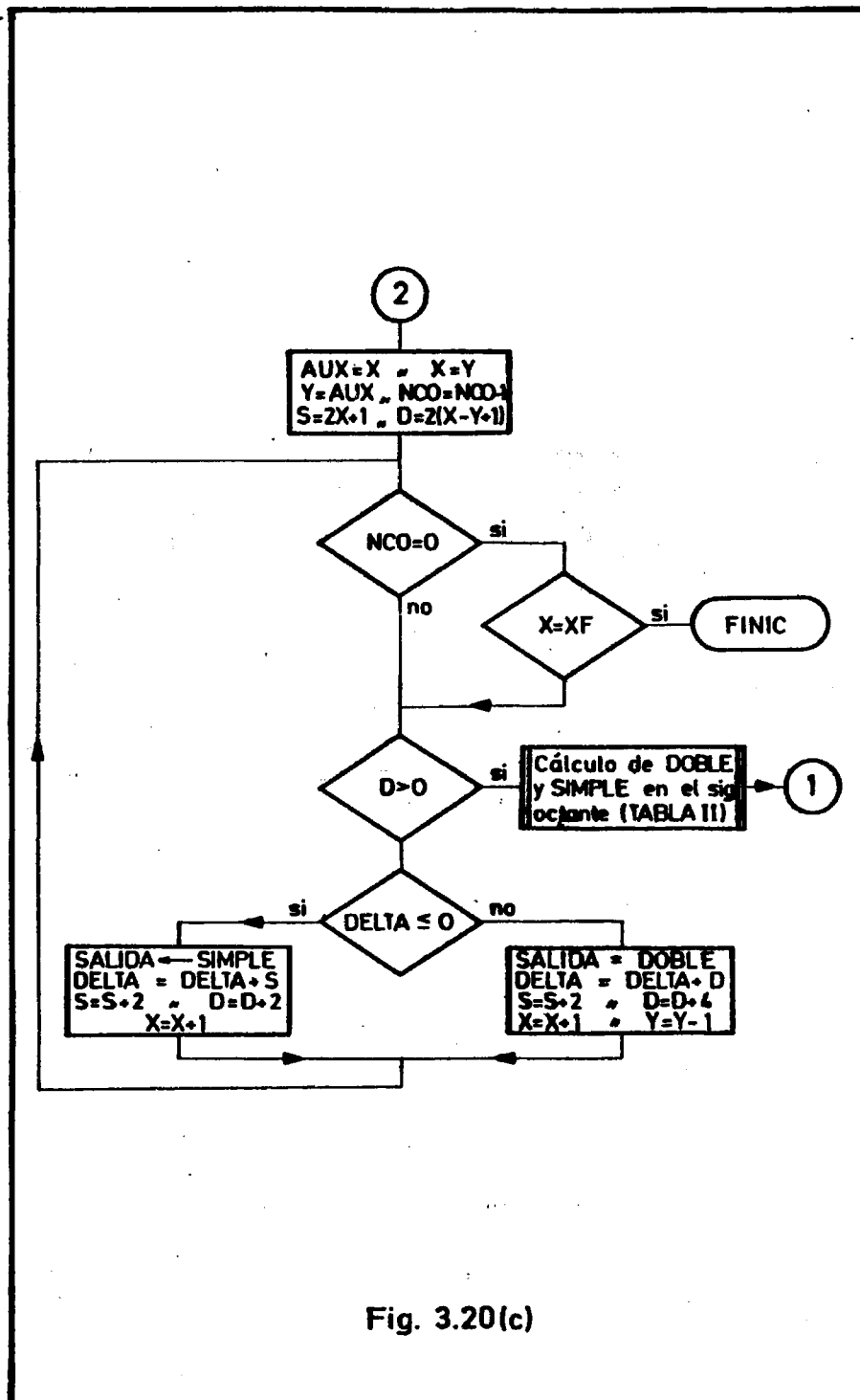


Fig. 3.20(c)

memoria de programa. Es el compromiso clásico entre memoria y tiempo de ejecución, que en esta ocasión se resuelve a favor del segundo.

Damos a continuación un ejemplo del comportamiento del método propuesto en que se genera, en sentido AR, el primer cuadrante de una circunferencia de radio 24, con los distintos valores de las variables que intervienen en el proceso. En la figura 3.21 se vé dibujada la circunferencia, y sobre ella, la poligonal completa a que dá lugar el algoritmo. Se puede observar la igualdad de los fragmentos de poligonal correspondientes a cada cuadrante. Debemos hacer notar por otra parte, que en una máquina-herramienta gobernada por un sistema de control numérico que tuviera una resolución de  $10\mu$ , esa circunferencia tendría un radio de 0,24 mm. Naturalmente, una circunferencia de esas características es imposible de mecanizar, ya que, aparte de las restricciones de radio mínimo que se exponen en otro capítulo de esta memoria, el diámetro de la herramienta que realizara la mecanización excedería en mucho ese valor.

#### 3.4.4. Extensión del método al trazado de cónicas

Aunque nuestro objetivo era el obtener un método particularmente adecuado para describir rectas y arcos de circunferencia, elementos suficientes para la realización de operaciones de contorno en un control numérico de tipo medio, vamos a ver en este apartado como la metodología presentada es susceptible de aplicación al trazado de las cónicas, lo que puede ser interesante

GENERACION DE UN CUADRANTE DE CIRCUNFERENCIA

<u>Paso</u>	<u>x</u>	<u>y</u>	<u>s</u>	<u>D</u>	<u>A</u>	<u>Mov.</u>
0	0	24	1	-46	0	S
1	1	24	3	-44	+1	D
2	2	23	5	-40	-43	S
3	3	23	7	-38	-38	S
4	4	23	9	-36	-31	S
5	5	23	11	-34	-22	S
6	6	23	13	-32	-11	S
7	7	23	15	-30	+2	D
8	8	22	17	-26	-28	S
9	9	22	19	-24	-11	S
10	10	22	21	-22	+8	D
11	11	21	23	-18	-14	S
12	12	21	25	-16	+9	D
13	13	20	27	-12	-7	S
14	14	20	29	-10	+20	D
15	15	19	31	-6	+10	D
16	16	18	33	-2	+4	D
17	17	17	-33	+2	+2	S
18	17	16	-31	+4	-31	D
19	18	15	-29	+8	-27	D
20	19	14	-27	+12	-19	D
21	20	13	-25	+16	-7	D
22	21	12	-23	+20	+9	S
23	21	11	-21	+22	-14	D
24	22	10	-19	+26	+8	S
25	22	9	-17	+28	-11	D
26	23	8	-15	+32	+17	S
27	23	7	-13	+34	+2	S
28	23	6	-11	+36	-11	D
29	24	5	-9	+40	+25	S
30	24	4	-7	+42	+16	S
31	24	3	-5	+44	+9	S
32	24	2	-3	+46	+4	S
33	24	1	-1	+48	+1	S
34	24	0	+1	+50	0	



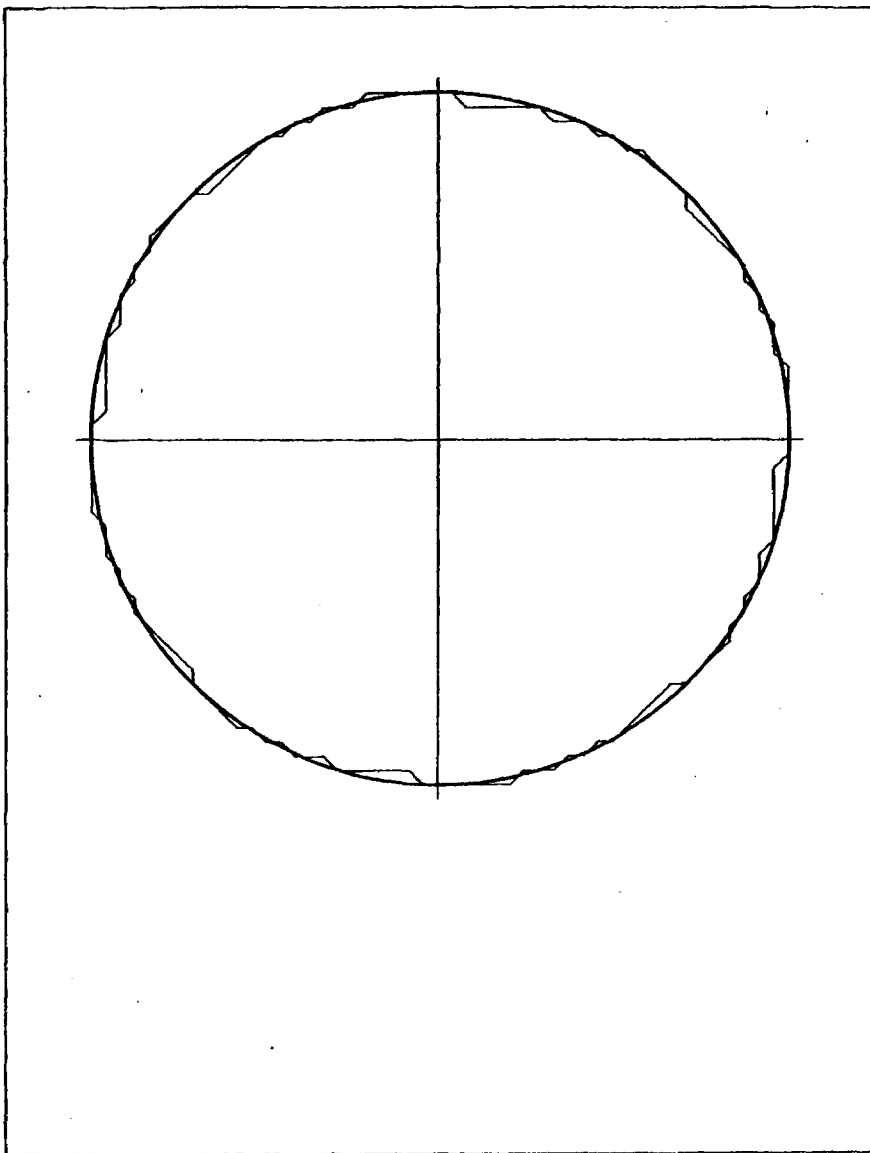


FIGURA 3.21

para una ampliación de las prestaciones del sistema a los casos de contorno de arcos elípticos y parabólicos principalmente.

Consideremos la ecuación general de una cónica:

$$ay^2 + \beta x^2 + 2\gamma xy + 2uy + 2vx - c = 0$$

El método de trabajo es, naturalmente la reducción de la misma al primer cuadrante, respetando los movimientos propios y reales en cada punto y asimilándolos a los desplazamientos simple y doble de cada uno de los dos octantes de ese primer cuadrante. Estudiaremos entonces lo que sucede en cada uno de éstos.

Para el primer cuadrante, sentido AR, los movimientos elementales posibles a realizar son:

$\Delta x=0, \Delta y=-1$  movimiento simple

$\Delta x=1, \Delta y=-1$  movimiento doble

La expresión de Taylor en este caso se reduce en el caso de movimiento simple a:

$$\begin{aligned} f(x, y+\Delta y) &= f(x, y) + \frac{\delta f(x, y)}{\delta y} \Delta y + \frac{1}{2} \frac{\delta^2 f(x, y)}{\delta y^2} (\Delta y)^2 = \\ &= f(x, y) - (2\alpha y + 2\gamma x + 2u) + \alpha = f(x, y) + S \\ \text{con } S &= 2\alpha y - 2\gamma x - 2u + \alpha \end{aligned}$$

ya que los restantes términos del desarrollo son nulos.

Análogamente y para el caso de movimiento doble tendremos:

$$\begin{aligned} f(x+\Delta x, y+\Delta y) &= f(x, y) + \frac{\delta f(x, y)}{\delta x} \Delta x + \frac{\delta f(x, y)}{\delta y} \Delta y + \\ &+ \frac{1}{2} \left( \frac{\delta^2 f(x, y)}{\delta x^2} (\Delta x)^2 + \frac{\delta^2 f(x, y)}{\delta y^2} (\Delta y)^2 + \frac{\delta^2 f(x, y)}{\delta x \delta y} \Delta x \Delta y \right) = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= f(x,y) + (2\beta x + 2\gamma y + 2v) - (2\alpha y + 2\gamma x + 2u) + \frac{1}{2}(2\alpha + 2\beta - 2\gamma) = \\
 &= f(x,y) + (2\beta - 2\gamma)x + (2\gamma - 2\alpha)y + (2v - 2u) + (\alpha + \beta - \gamma) = \\
 &= f(x,y) + D.
 \end{aligned}$$

$$\text{donde } D = (2\beta - 2\gamma)x + (2\gamma - 2\alpha)y + (2v - 2u) + (\alpha + \beta - \gamma)$$

Veamos ahora como esos valores  $S$  y  $D$  así definidos, y el valor de la función en un punto próximo, deben ser actualizados en cada iteración según el movimiento realizado.

En el caso de haberse realizado el movimiento simple,  $y_{i+1} = y_i - 1$ , los valores de  $S$  y  $D$  quedan actualizados como sigue:

$$\begin{aligned}
 S_{i+1} &= -2\alpha(y-1) - 2\gamma x + \alpha - 2u = S_i + 2\alpha \\
 D_{i+1} &= (2\beta - 2\gamma)x + (2\gamma - 2\alpha)(y-1) + (2v - 2u) + (\alpha + \beta - \gamma) = \\
 &= D_i + (2\alpha - 2\gamma)
 \end{aligned}$$

y en cuanto al valor de la función  $\Delta$ :

$$\Delta_{i+1} = \Delta_i + S$$

Si el movimiento realizado hubiera sido el doble, entonces tendremos  $x_{i+1} = x_i + 1, y_{i+1} = y_i - 1$  y los nuevos valores de  $S$  y  $D$  serán:

$$\begin{aligned}
 S_{i+1} &= -2\alpha(y-1) - 2\gamma(x+1) + \alpha - 2u = S_i + (2\alpha - 2\gamma) \\
 D_{i+1} &= (2\beta - 2\gamma)(x+1) + (2\gamma - 2\alpha)(y-1) + (2v - 2u) + (\alpha + \beta - \gamma) = \\
 &= D_i + (2\gamma + 2\beta - 4\gamma)
 \end{aligned}$$

y el nuevo valor de la función:

$$\Delta_{i+1} = \Delta_i + D.$$

En el segundo octante, sentido AR, la dirección predominante es la del semieje x positivo.

Por tanto tenemos:

$\Delta x=1, \Delta y=0$  movimiento simple

$\Delta x=1, \Delta y=-1$  movimiento doble

Aplicando la fórmula de Taylor al desplazamiento simple:

$$f(x+\Delta x, y) = f(x, y) + \frac{\delta f(x, y)}{\delta x} \Delta x + \frac{1}{2} \frac{\delta^2 f(x, y)}{\delta x^2} (\Delta x)^2 =$$

$$= f(x, y) + 2\beta x + 2\gamma y + 2v + \beta = f(x, y) + S$$

siendo en este octante  $S = 2\beta x + 2\gamma y + \beta + 2v$ .

Para el caso de desplazamiento doble tendremos:

$$f(x+\Delta x, y+\Delta y) = f(x, y) + \frac{\delta f(x, y)}{\delta x} \Delta x + \frac{\delta f(x, y)}{\delta y} \Delta y +$$

$$\frac{1}{2} \frac{\delta^2 f(x, y)}{\delta x^2} (\Delta x)^2 + \frac{\delta^2 f(x, y)}{\delta y^2} (\Delta y)^2 + \frac{\delta^2 f(x, y)}{\delta x \delta y} \Delta x \Delta y =$$

$$= f(x, y) + (2\beta - 2\gamma)x + (2\gamma - 2\alpha)y + (2v - 2u) + (\alpha + \beta - \gamma) = f(x, y) + D$$

$$\text{con } D = (2\beta - 2\gamma)x + (2\gamma - 2\alpha)y + (2v - 2u) + (\alpha + \beta - \gamma)$$

igual, lógicamente, al valor obtenido en el primer octante.

En el caso de haberse realizado el movimiento simple,  $x_{i+1} = x_i + 1$ ,  $y_{i+1} = y_i$  y los valores de S, D y la función deberán ser actualizados de la siguiente manera:

$$S_{i+1} = 2\beta(x+1) + 2\gamma y + \beta + 2v = S_i + 2\beta$$

$$D_{i+1} = (2\beta - 2\gamma)(x+1) + (2\gamma - 2\alpha)y + (2v - 2u) + (\alpha + \beta - \gamma)$$

$$= D_i + (2\beta - 2\gamma)$$

y en cuanto a la función:

$$\Delta_{i+1} = \Delta_i + S$$

Para el desplazamiento doble,  $x_{i+1} = x_i + 1, y_{i+1} = y_i - 1$ , tendremos:

$$S_{i+1} = 2\beta(x+1) + 2\gamma(y-1) + \beta + 2v = S_i + (2\beta - 2\gamma)$$

$$D_{i+1} = (2\beta - 2\gamma)(x+1) + (2\gamma - 2\alpha)(y-1) + (2v - 2u) + (\alpha + \beta - \gamma) =$$

$$= D_i + (2\alpha + 2\beta - 4\gamma)$$

y el valor actualizado de la función:

$$\Delta_{i+1} = \Delta_i + D$$

Como se puede observar, todas las fórmulas obtenidas para el primer octante son válidas para el segundo sin más que cambiar  $\alpha$  por  $\beta$ .

Queda por resolver el problema de fin de octante. Evidentemente, en el sentido AR que estamos considerando, el primer octante finaliza en el momento en que la tangente  $y'$  a la cónica tiende a  $\infty$ ; en cuanto al segundo octante, el fin de su generación se alcanzará cuando el valor de la tangente  $y'$  sea de  $-1$ .

Derivando implícitamente respecto a  $x$  en la ecuación general de la cónica tenemos:

$$2\alpha yy' + 2\beta x + 2\gamma xy' + 2\gamma y + 2uy' + 2v = 0$$

de donde:

$$y' = -\frac{2\gamma y + 2\beta x + 2v}{2\alpha y + 2\gamma x + 2u}$$

Para el primer octante, aplicando la condición de final obtenemos:

$$2\alpha y + 2\gamma x + 2u = 0$$

De acuerdo con ello, y dado el valor de S para este octante,  $S = -2\alpha y - 2\gamma x - 2u + \alpha$ , el final de trazado, tendrá lugar para:

$$S = \alpha$$

debiendo procederse en ese momento al cambio de octante. En cuanto al segundo octante, aplicando la condición de final, tendremos:

$$- \frac{2\gamma y + 2\beta x + 2v}{2\alpha y + 2\gamma x + 2u} = -1$$

luego:

$$(2\beta - 2\gamma)x + (2\gamma - 2\alpha)y + (2v - 2u) = 0$$

y recordando el valor de  $D = (2\beta - 2\gamma)x + (2\gamma - 2\alpha)y + (2v - 2u) + (\alpha + \beta - \gamma)$  tenemos que el fin de octante se alcanzará cuando:

$$D = \alpha + \beta - \gamma$$

Una vez que el proceso de trazado entre en el último octante a generar, se hace preciso realizar un control de parada. Esto es sencillo, dado que en cada octante hay una dirección predominante de avance. En el primero es la del eje y. Por tanto, la condición de parada será  $Y = Y_F$ . En el segundo, donde es el eje x la dirección en la que siempre hay avance, la condición de parada será  $X = X_F$ .

Recuerdesé que la condición de parada sólo debe aplicarse cuando nos encontremos en el último octante en el proceso de generación de la cónica.

## C A P I T U L O   I V

### DISEÑO OPTIMO Y SIMULACION DEL SISTEMA DE OPERACION EN CONTORNEO DE UN CNC

#### 4.1. INTRODUCCION

A lo largo del segundo y tercer capítulo de esta memoria se han abordado los problemas relativos a los sistemas de control de posición que gobiernan los ejes de un control numérico de máquinas-herramienta así como el tema de la generación de curvas.

En el presente capítulo se pretende conjugar lo expuesto en aquellos para obtener algunas contribuciones importantes al diseño de lo que en el primer capítulo se ha considerado como el núcleo de un sistema de control numérico basado en microprocesadores, con la obtención de los parámetros más característicos del mismo, como son la ganancia en lazo abierto del sistema de control de posición, la resolución del convertidor D/A a utilizar, etc.

La simulación del sistema ha permitido realizar la generación de contornos. En base a lo expuesto en 2.4.1, se ha elegido como sistema a simular uno cuya configuración engloba a las CNC2 y CNC3, por ser las más adecuadas, ya que en ellas el microcomputador forma parte esencial de los servomecanismos que gobiernan los ejes, realizándose el control de velocidad en el interior del mismo, y prescindiendo por tanto del contador incremental/decremental externo. Además, de esta forma el microcomputador puede intervenir en el ajuste de los parámetros característicos del sistema, en la forma que se expone en 4.2

La elección, a la hora de la implementación de una de las dos configuraciones, dependerá de los elementos utilizados en la síntesis. Si el registro de realimentación es externo, parece más aconsejable la CNC3, por ser entonces ese registro de pequeña capacidad. Caso de que fuese interno, se debería optar por la CNC2, ya que entonces sería más sencillo el control de la posición real de la herramienta en cada momento.

Las discrepancias entre los contornos teóricos y los obtenidos por medio del sistema simulado han servido de base para establecer criterios que, una vez adoptados, reducen aceptablemente los errores cometidos.

#### 4.2. DISEÑO OPTIMO: CALCULO DE PARAMETROS

Uno de los parámetros que condicionan de manera más fuerte el comportamiento de un sistema de control numérico es la ganancia en lazo abierto,  $K$ .

Una vez establecida la configuración del sistema en el apartado anterior, si se atiende el criterio de optimización indicado en el segundo capítulo de esta memoria de minimización de la integral del valor absoluto del error, la fórmula (10) obtenida en 2.4.3. nos permite encontrar, junto con la gráfica de la figura 2.8 el valor de  $K$  que, para un período de muestreo  $T$  y una constante de tiempo del motor  $\tau$  dados, optimiza la respuesta del servomecanismo. La forma más sencilla de conseguir que la ganancia  $K$  del lazo sea la óptima es variando la ganancia del convertidor D/A. De esta forma se puede programar un valor para  $K_c$  que suministre un valor para la ganancia



K Óptimo.

Recordando que  $K = K_e K_c K_m$  y sin tener en cuenta la ganancia del amplificador de potencia, se puede obtener el valor de  $K_c$ .

$$K_c = \frac{K}{K_e K_m} \text{ volt/imp.}$$

y a partir de aquí, se puede encontrar la resolución del convertidor D/A. Si se supone que la velocidad máxima de avance en posicionamiento es  $V$  mm/min, que esta velocidad máxima se alcanza cuando la entrada al regulador del motor es  $\pm 10$  voltios y que el captador incremental emite un impulso por cada  $R$  micras recorridas por la mesa, las respectivas ganancias serían:

$K_e = \frac{1}{R} \text{ Imp}/\mu$  para la ganancia del captador de posición y

$K_m = \frac{10^3 V}{600} = \frac{5V}{3} \frac{\mu/\text{seg}}{\text{volt}}$  para la ganancia del sistema regulador de velocidad, y por tanto:

$$K_c = \frac{K}{K_e K_m} = \frac{3KR}{5V} \text{ volt/imp.}$$

La resolución del convertidor utilizado  $r$ , deberá cumplir la desigualdad:

$$2^r \geq \frac{50 V}{3KR} \text{ siendo } r \text{ un número entero.}$$

de donde:

$$r \log 2 \geq \log 50 + \log V - \log 3 - \log K - \log R$$

$$r \geq \frac{\log (50/3) + \log (V/KR)}{\log 2} \quad (1)$$

Por tanto, la resolución requerida del convertidor D/A será el menor número entero que verifique la desigualdad (1).

Puede observarse en esta desigualdad que al disminuir el valor de la ganancia del lazo K aumenta el numerador del segundo miembro, siendo necesario por tanto aumentar la resolución del convertidor D/A. Este mismo efecto tiene lugar con la disminución de R, esto es, si se mejora la precisión del captador de posición, lo que suele entenderse en los catálogos como resolución del sistema.

Dado que los convertidores D/A más usuales en el mercado son los de 8, 10 ó 12 bits de resolución, si se quiere que el valor de K sea exactamente el obtenido a partir de la gráfica de la figura 2.8, será necesario que el microcomputador aumente por programa la ganancia  $K_c$  del convertidor D/A.

Un posible método de aumentar esta ganancia sería multiplicar el registro del microcomputador donde se tiene almacenado el error de posición por un factor de corrección C, que sería función de R, K, V y la r del convertidor D/A que se utilice realmente en la implementación.

Suponiendo un convertidor de r bits:

$$S'_{sal} = S_{sal} \left( \frac{2^r}{\frac{50V}{3KR}} \right) = S_{sal} \left( \frac{2^r \cdot 3KR}{50V} \right) = S_{sal} \cdot C \quad (2)$$

Puede observarse que este valor del factor de corrección C que se deduce de (2), sería función del conjunto

de equipos formados por el control numérico y la máquina-herramienta concreta, y no sufriría variación una vez seleccionado el sistema.

Por otra parte, con la utilización de este factor de corrección de la salida que ataca los reguladores de velocidad, se logrará un control automático óptimo tanto de la aceleración como de la deceleración en los desplazamientos de la máquina-herramienta.

Así pues, utilizando este factor de corrección la ganancia total en lazo abierto sería:

$$K = CK_e K_m K_c$$

Se ha de hacer notar que en toda la exposición anterior se ha calculado el valor de C como si las únicas ganancias existentes fuesen la del convertidor D/A, la ganancia del captador y la ganancia del conjunto regulador-motor-máquina-herramienta.

Como en el lazo existe además un amplificador de potencia, la ganancia correspondiente debería incluirse dentro del término  $K_c$ , con la consiguiente modificación en el factor de corrección C, consideración que debe extenderse igualmente al caso en que existieran algunas otras ganancias distintas de las que aquí se han indicado.

Debe hacerse notar que el factor de corrección C puede tener diferentes valores para cada uno de los ejes de la máquina-herramienta, con lo que se podría conseguir que las ganancias en lazo abierto  $K_x, K_y$  y  $K_z$  fuesen idénticas con lo que se adaptarían por medio del sistema de control ejes desadaptados mecánicamente. Como ya se ha visto en

2.4.4, los errores de perfil que se producen durante el proceso de contorno disminuyen sensiblemente cuando las ganancias en lazo abierto de los ejes tienen el mismo valor. Así, por ejemplo, cuando  $K_x = K_y$ , el error de perfil obtenido en régimen estacionario durante el proceso de generación de rectas en el plano es nulo.

#### 4.2.1. Ejemplo de diseño de un sistema de control de posición.

Para concretar lo hasta aquí expuesto, se propone a continuación un ejemplo de aplicación en el que, a partir de unos datos que responden a valores habituales en máquinas-herramienta de tipo medio para contorno, se calcularán los valores de los parámetros del servomecanismo.

Sea una máquina-herramienta cuya velocidad máxima de avance en posicionamiento es de 12 m/min, gobernada por un motor y un regulador para cada eje cuya entrada en tensión máxima es de  $\pm 10$  voltios, teniendo los motores una constante de tiempo mecánica de 20 ms.

Finalmente, sean los captadores de posición del tipo incremental digital, emitiendo un impulso cada vez que existe un desplazamiento de 5  $\mu$  a lo largo del eje.

Una vez analizado el ciclo de trabajo del microcomputador el valor mínimo del período de muestreo  $T$  dependerá del tiempo de procesamiento, función de la complejidad del programa y de la potencia de cálculo del procesador.

Por otra parte, el valor máximo de  $T$  estará en función de la anchura de banda requerida para el servomecanismo, siendo conveniente siempre que el valor de  $T$  sea lo menor posible ya que de esta forma, y como puede verse en la gráfica de la figura 2.8, el valor de la ganancia en lazo abierto  $K$  será más elevado, con el consiguiente aumento en la velocidad de respuesta del servomecanismo, siendo más pequeños, en otro orden de cosas, los errores de perfil en la generación de contornos.

Un valor para  $T$  de 10 ms es típico, como ya se ha indicado a lo largo de esta memoria, y se puede adoptar para este ejemplo de aplicación.

De acuerdo con lo expuesto en el capítulo segundo, se puede realizar un análisis de estabilidad del servomecanismo.

Según los datos anteriores:

$$\frac{T}{\tau} = \frac{10}{20} = 0.5 < 3.83$$

Luego la frontera de estabilidad vendrá dada por la desigualdad (1) de 2.4.2.1. En este caso concreto:

$$K\tau < \frac{1 - e^{-0.5}}{1 - e^{-0.5} - 0.5e^{-0.5}} = 4.3$$

Por tanto con  $K < 218$  no existirán problemas de inestabilidad del servomecanismo.

Usando la fórmula (10) de 2.4.3, se obtiene, introduciendo los datos de que disponemos, el valor óptimo de la ganancia en lazo abierto.

$$K = 22 \text{ seg}^{-1}$$

Por su parte, los valores de  $K_e$ , ganancia del captador de posición, y  $K_v$ , ganancia del sistema regulador de velocidad, serán:

$$K_e = \frac{1}{5} \text{ Imp}/\mu$$

$$K_m = \frac{12 \cdot 10^3 \cdot 5}{3} = 2 \cdot 10^4 \frac{\mu/\text{seg}}{\text{volt}}$$

y en consecuencia:

$$K_c = \frac{22.5}{2 \cdot 10^4} = 55 \cdot 10^{-4} \text{ volt/Imp}$$

Aplicando la expresión (1) dada en 4.2. se obtiene:

$$r \geq \frac{\log(50/3) + \log(12 \cdot 10^3 / 22.5)}{\log 2} = 10.82$$

Luego el valor de  $r$ , resolución del convertidor D/A, será de 11 bits.

Dada la gama de convertidores D/A habituales existentes en el mercado, se podría utilizar un convertidor D/A de 12 bits con una salida de  $\pm 10$  voltios.

Utilizando este convertidor, y sin introducir ningún factor de corrección, se puede calcular la ganancia en lazo abierto  $K$  del servomecanismo a partir de las ganancias parciales, dado que en estas circunstancias, el valor de  $K_c$  es:

$$K_c = \frac{10}{4096} = 24 \cdot 10^{-4} \text{ volt/Imp}$$

Como  $K_e$  y  $K_m$  tienen los valores expresados anteriormente y

$$K = K_e K_m K_c$$

será:

$$K = \frac{2 \cdot 10^4 \cdot 24 \cdot 10^{-4}}{5} = 9.6 \text{ sg}^{-1}$$

valor excesivamente bajo frente al de  $22 \text{ seg}^{-1}$  calculado anteriormente como óptimo.

La manera de incrementar el valor de  $K$  será la de introducir el factor de corrección sugerido en el apartado anterior y, aplicando la fórmula (2) del mismo, se tiene, para los datos presentes:

$$C = \frac{2^{12} \cdot 3 \cdot 22.5}{50 \cdot 12 \cdot 10^3} = \frac{2^{12} \cdot 330}{600 \cdot 10^3} = 2.2528 \approx 2.25$$

Esto es, el microprocesador deberá multiplicar el valor almacenado en el registro de seguimiento (es decir, el error de posición) por el número 2.25 antes de atacar con el la entrada del convertidor D/A, siendo en este caso el valor de la ganancia en lazo abierto.

$K = CK_e K_c K_m = 2.25 \cdot \frac{1}{5} \cdot 2 \cdot 10^4 \cdot 24 \cdot 10^{-4} = 21.6 \text{ seg}^{-1}$   
valor muy cercano al de  $K = 22 \text{ seg}^{-1}$  deducido teóricamente como la ganancia óptima del lazo. Recuerdesé que para el cálculo de  $C$  no hemos tenido en cuenta ni la ganancia del amplificador de potencia ni ninguna otra ganancia adicional.

#### 4.3. SIMULACION: DESCRIPCION GENERAL

El comportamiento del sistema de control elegido se ha estudiado mediante un programa de simulación que ha tenido como objetivo el ensayar los resultados obtenidos para los distintos parámetros de diseño del modo más cercano a la realidad posible.

El núcleo del programa de simulación consta de varias partes esenciales. Primeramente se han simulado los motores de la máquina-herramienta, que se suponen iguales, alimentados por reguladores de velocidad. Como resultado de la ejecución de estos subprogramas se obtiene la velocidad y posición reales de la herramienta sobre la mesa (a efectos de simplificación, se ha reducido el problema de contorno a dos dimensiones).

Otra sección importante del programa simulador la constituyen los interpoladores, escritos en Fortran, como el resto del programa y que tienen como base el método propuesto en 3.4.

Su salida, junto con el cálculo de posición exacta alcanzada por la herramienta, permiten obtener el valor con que se han de alimentar los reguladores de velocidad.

El programa acepta datos de dos fuentes distintas. La primera referente al contorno a describir, dividido en tramos definidos geométricamente por los datos precisos, junto con la velocidad a que se ha de recorrer. La segunda fuente suministra los parámetros característicos de la máquina-herramienta a simular en cada pasada, junto con los propios del control numérico.

##### 4.3.1. Entrada de datos

El fichero que contiene los datos relativos al contorno a describir está estructurado como sigue:



- Un primer registro que contiene el número de tramos a recorrer.
- Un registro que contiene las coordenadas de la posición de origen.
- Un registro para cada tramo recto que contiene la posición del punto final del mismo (el primero es, evidentemente, el punto final del tramo anterior), junto con la velocidad a que se ha de recorrer el tramo expresada en impulsos por segundo (en el sistema simulado se ha trabajado bajo la suposición de que la separación entre marcas en el captador de posición de cada eje de la máquina-herramienta es de  $10 \mu$ )
- Un registro para cada tramo que sea un arco de circunferencia, donde además de las coordenadas del punto final del arco y de la velocidad, se dan las coordenadas del centro de la circunferencia y el sentido en que se ha de recorrer el arco.

La segunda entrada que precisa el programa está relacionada con los motores simulados y el control numérico. Los datos suministrados son:

- Un coeficiente multiplicativo para la velocidad que aparece en las definiciones de cada tramo. Su función es la de, con el mínimo esfuerzo, recorrer un mismo contorno a diferentes velocidades, lo que ha permitido estudiar experimentalmente los errores de perfil y redondeo.
- Constante de tiempo mecánica de los motores simulados

- Periodo de muestreo en milisegundos. La mayoría de las experiencias realizadas se han efectuado con el valor típico , ya comentado en el segundo capítulo de esta memoria, de 10 milisegundos.

#### 4.3.2. Cálculo de la velocidad y posición de la herramienta

El programa de simulación supone para el sistema formado por el sistema regulador más el motor una función de transferencia:

$$F(s) = \frac{K}{1+\tau s}$$

que cuando la entrada es un salto unidad, proporciona unas respuestas de velocidad,  $v(t)$ , y de posición,  $P(t)$ , dadas por la expresiones:

$$V(t) = K (1 - e^{-\frac{t}{\tau}}) \quad (1)$$

$$P(t) = \frac{K}{a} (e^{-\frac{t}{\tau}} + \frac{t}{\tau} - 1) \quad (2)$$

donde K indica la velocidad que se comunica a cada eje cuando la entrada al regulador de velocidad es de 1 voltio. En este caso se ha supuesto  $K= 0.02$  m/s puesto que los reguladores más usuales en máquinas-herramienta son aquellos en los que una tensión de entrada de 10 voltios dá lugar a una velocidad lineal por eje de 12 metros/min.

Es preciso realizar el cálculo de la velocidad al finalizar el i-ésimo período de muestreo, conociendo los valores de las entradas  $e_i$  a los reguladores de velocidad al principio de cada período de muestreo y siendo T el valor de dicho período. Como se ve en la figura 4.1, la entrada a los reguladores es una sucesión de saltos, cuyos efectos se suman según el principio de superposición.

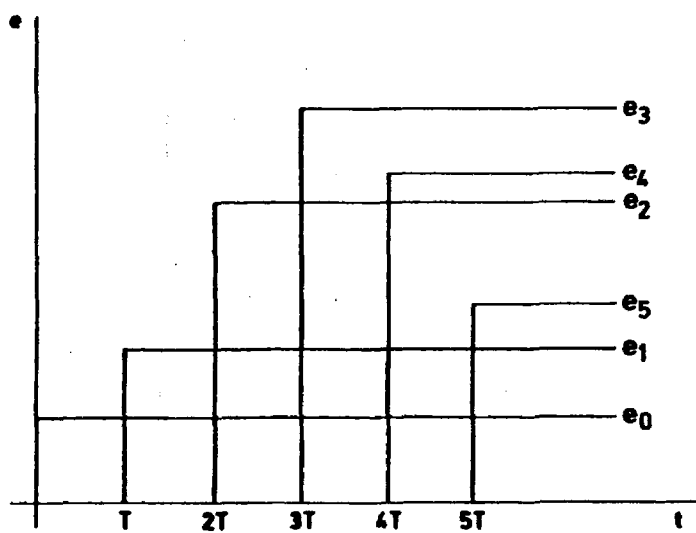


Fig. 4.1

Por tanto:

$$V(iT) = \sum_{j=1}^i e_j V((i+1-j)T) \quad (3)$$

$$P(iT) = \sum_{j=1}^i e_j P((i+1-j)T) \quad (4)$$

donde V y P vienen dadas por las expresiones (1) y (2).

Este método, sin embargo, no puede aplicarse de una manera inmediata, dado que el número de funciones diferentes a sumar puede ser muy alto, si el tiempo simulado es lo suficientemente amplio. Para solventar este problema, se ha tenido en cuenta que existe un  $t_0$  tal que  $V(t) = K$  para todo  $t \geq t_0$ . Entonces se calcula un n tal que  $V(nT) = K$  y para  $i \geq n$  se verificará:

$$V(iT) = \sum_{j=i-n+2}^i e_j V((i+1-j)T) + V_i \quad (5)$$

$$P(iT) = \sum_{j=i-n+2}^i e_j P((i+1-j)T) + P_i$$

donde:

$$V_i = V_{i-1} + e_{i-n+1} K$$

$$P_i = P_{i-1} + V_i T$$

teniendo en cuenta que:

$$V_{n-1} = 0$$

$$P_{n-1} = 0$$

Este método expuesto para el cálculo de la velocidad es susceptible de ejecutarse en un computador, dado

que no requiere más que un número fijo de operaciones y sólo requiere conservar el valor de las  $n$  últimas entradas al regulador de velocidad de cada motor simulado.

#### 4.3.3. Cálculo de la distancia

Una vez calculada la posición de la herramienta en un instante de muestreo, se calcula la distancia de esta posición real al contorno teórico como la mínima distancia al tramo que se está interpolando, al anterior o al siguiente, dado que las zonas próximas a los puntos de conexión entre tramos suelen ser las más conflictivas debido a los errores de redondeo que pueden producirse.

La distancia a un tramo recto es:

- la distancia del punto al tramo, si la perpendicular del punto al tramo corta a éste, o bien
- la distancia al extremo del tramo más próximo, si la perpendicular del punto al tramo corta a la prolongación de éste.

La distancia a una circunferencia es:

- la distancia del punto al centro menos el radio, si la recta que une el centro y el punto corta a la circunferencia en un punto del tramo a generar, o bien
- la distancia del punto al extremo más próximo del arco si no se verifica la condición anterior.

#### 4.3.4. Modo de actuación del interpolador

Una vez conocido el número de tramos a ejecutar el programa entra en un ciclo que se repite hasta alcanzar

el último tramo y que consiste en iniciar adecuadamente las variables que operan sobre cada tipo de tramo (recto o curvo), efectuando la interpolación correspondiente a continuación.

La iniciación propia de cada tramo consiste en:

- pasar a los subprogramas los datos geométricos necesarios.
- calcular, ya conocidas la velocidad de trazado y las características de la máquina, el radio mínimo que puede trazarse dando un error de perfil tolerable.
- calcular, a partir de la velocidad de generación dada, el número de unidades de resolución que se han de recorrer en el eje de mayor crecimiento por período de muestreo, que se corresponderá con el número de veces que ha de ejecutarse el interpolador en cada período, ya que ha de tenerse en cuenta que un paso de interpolación únicamente determina el sucesor a cada punto de la malla (de paso la unidad de resolución) entre los ocho que le rodean de modo que sea el más próximo al tramo teórico.

#### 4.3.5. Modo de actuación global del programa simulador

Conocidas las características de la máquina-herramienta a simular, el programa calcula la ganancia óptima del convertidor D/A de acuerdo con los criterios expuestos en 4.2, así como el valor de la aceleración centrípeta máxima que se puede dar en la máquina simulada.

Luego el programa entra en un ciclo que se repite hasta que se dan las siguientes circunstancias: el eje de la herramienta dista menos de una unidad de resolución del

punto final del último tramo a generar y la velocidad de la herramienta es muy pequeña.

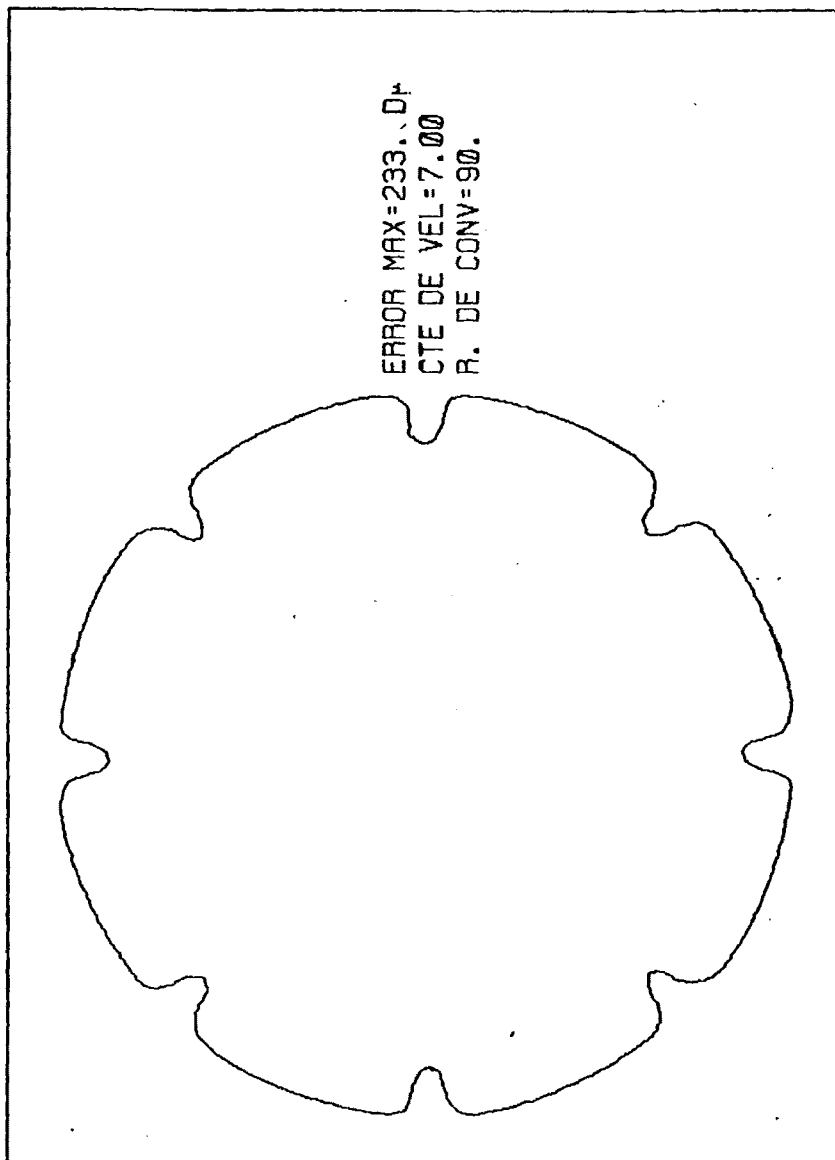
El ciclo básico de actuación consiste, globalmente, en lo siguiente:

- actualización del tiempo, que se incrementa en T, período de muestreo
- llamada del bloque interpolador
- cálculo del voltaje que ha de atacar a los reguladores de velocidad en este intervalo de muestreo
- cálculo de la posición y velocidad real de la herramienta en este instante de muestreo.
- detección de final

#### 4.4. CONSECUENCIAS DEL TRAZADO DE PERFILES

Una vez simulado el sistema, se han realizado diversas pruebas del trazado de contornos.

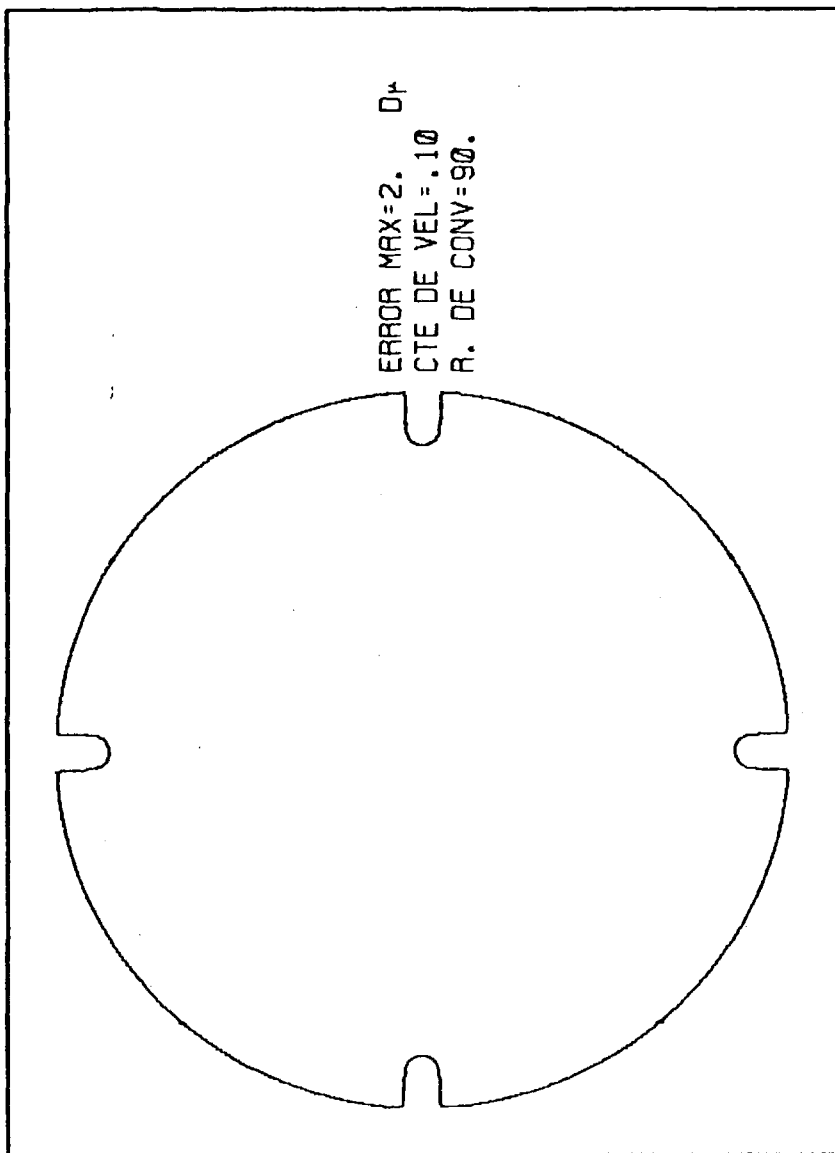
Se muestra en la figura 4.2, ayb, el mismo contorno, formado por rectas y arcos de circunferencia trazado por una máquina-herramienta con una constante de tiempo mecánica de sus motores de 20 milisegundos. Lo que diferencia un trazado de otro es la velocidad a que se ha realizado el recorrido, 21 veces superior en el caso de la figura 4.2.a, al de la figura 4.2.b, y por supuesto, el error máximo cometido, esto es, la distancia máxima entre la trayectoria real y la teórica, 2.33mm, en el primer caso frente a los 0.06 del segundo. Teniendo en cuenta que la precisión dada por el control numérico es la misma en una que en otro caso, de 10 $\mu$ , se concluye que, en efecto, la parte



TAU=20. MSEG

FIGURA 4.2.A





TAU=20. MSEG

FIGURA 4.2.B

mecánica del sistema impone unas restricciones en cuanto a la velocidad máxima aconsejable de mecanización de piezas.

El problema no resulta grave en arcos de circunferencias, donde existen compromisos entre velocidad lineal y radio de curvatura, puestos de manifiesto en 2.4. 4.2., aparte de que son menos frecuentes en la generación de contornos, por lo que su trazado a menor velocidad no resulta excesivamente gravoso en el tiempo global de mecanización por unidad. Pero el tener que trabajar a velocidades bajas en el trazado de tramos rectos, además de en posicionamiento en vacío (que se hace siempre según tramos rectos), a fin de mejorar la precisión del contorno, puede rebajar las especificaciones de un equipo de control numérico de máquinas-herramienta hasta hacerlo totalmente falto de competitividad.

En efecto, apoyándose en el simulador, se ha trazado el contorno descrito por el siguiente fichero, con la estructura dada en 4.3.1.

```
3
0.,0.
5000.,6000.,3000.
-1000.,11000.,3000.
```

para ser ejecutado con una máquina-herramienta de 20 msg de constante de tiempo mecánica en sus motores, siendo 10 msg. el período de muestreo y 1 la constante multiplicativa de la velocidad, lo que supone, dados los valores del fichero, un valor de 3cm/sg, velocidad relativamente corriente en contorno, si hacemos caso de las hojas técnicas de los controles numérico de más difusión en el mercado.

Sin embargo, el error obtenido en este sencillo ejemplo de contorno lineal angular es de 190 micras, como se puede ver en la figura 4.3, muy superior a la resolución con que trabaja el sistema.

Al realizarse una nueva pasada con los mismos valores para los parámetros mecánicos y con los siguientes en el fichero de descripción de contorno:

3  
0.,0.  
5000.,6000.,200.  
-1000.,11000.,200.

es decir, con una velocidad programada 15 veces menor, los resultados obtenidos son los que se muestran en la figura 4.4, es decir, un error de 10 micras, igual a la resolución del captador de posición simulado y totalmente aceptable por tanto, pero, hay que repetirlo, a una velocidad de 0.2 cm/seg, excesivamente baja para una operación típica y rentable de mecanizado.

Además, se ha constatado que lo que sucede es que el sistema siempre sobrepasa la posición teórica. Ello se debe al criterio utilizado para el diseño, y expuesto en 2.4.3.: el de la minimización de la integral del valor absoluto del error, que trae consigo un comportamiento óptimo de la operación en cuanto a su duración, pero implica el trabajar con un servosistema subamortiguado, con un valor máximo de rebasamiento del 6 al 7% del valor de régimen de la velocidad, lo que plantea, como puede verse, problemas de exactitud en la posición alcanzada.

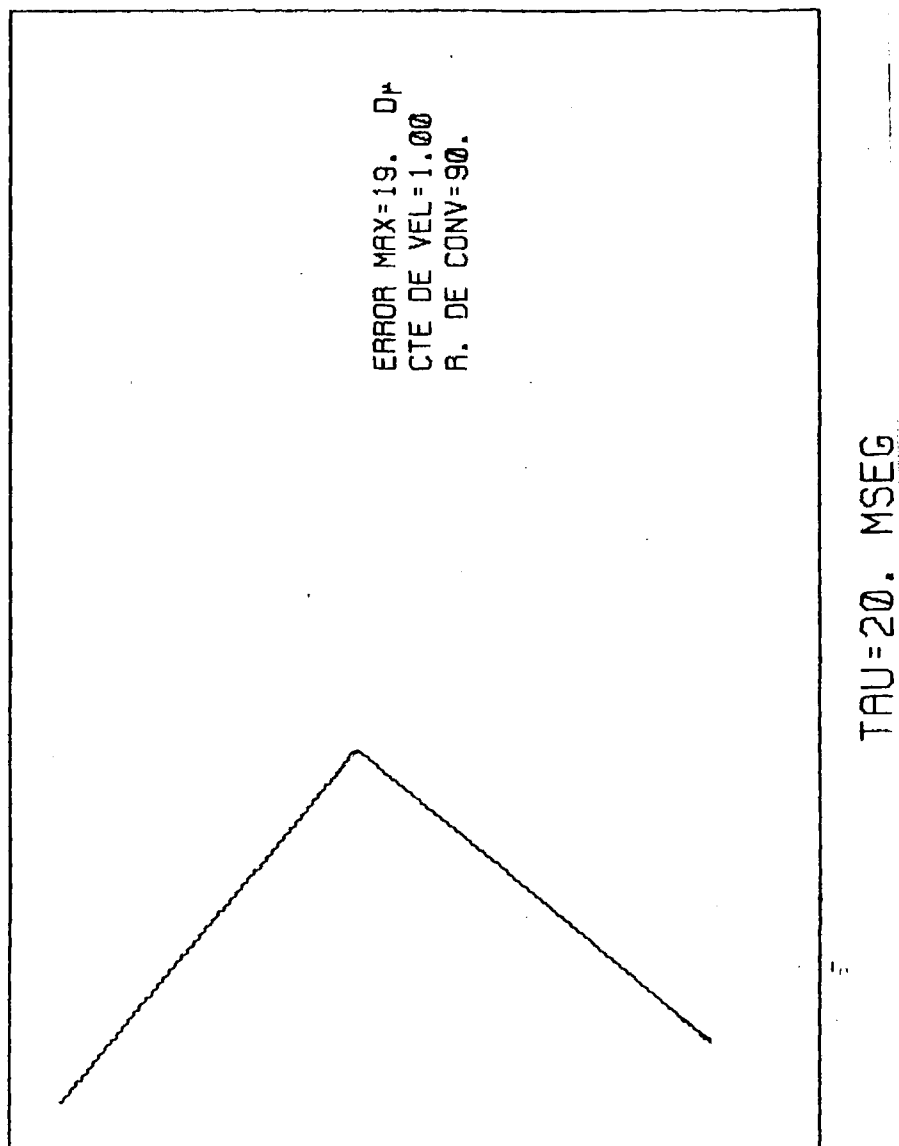
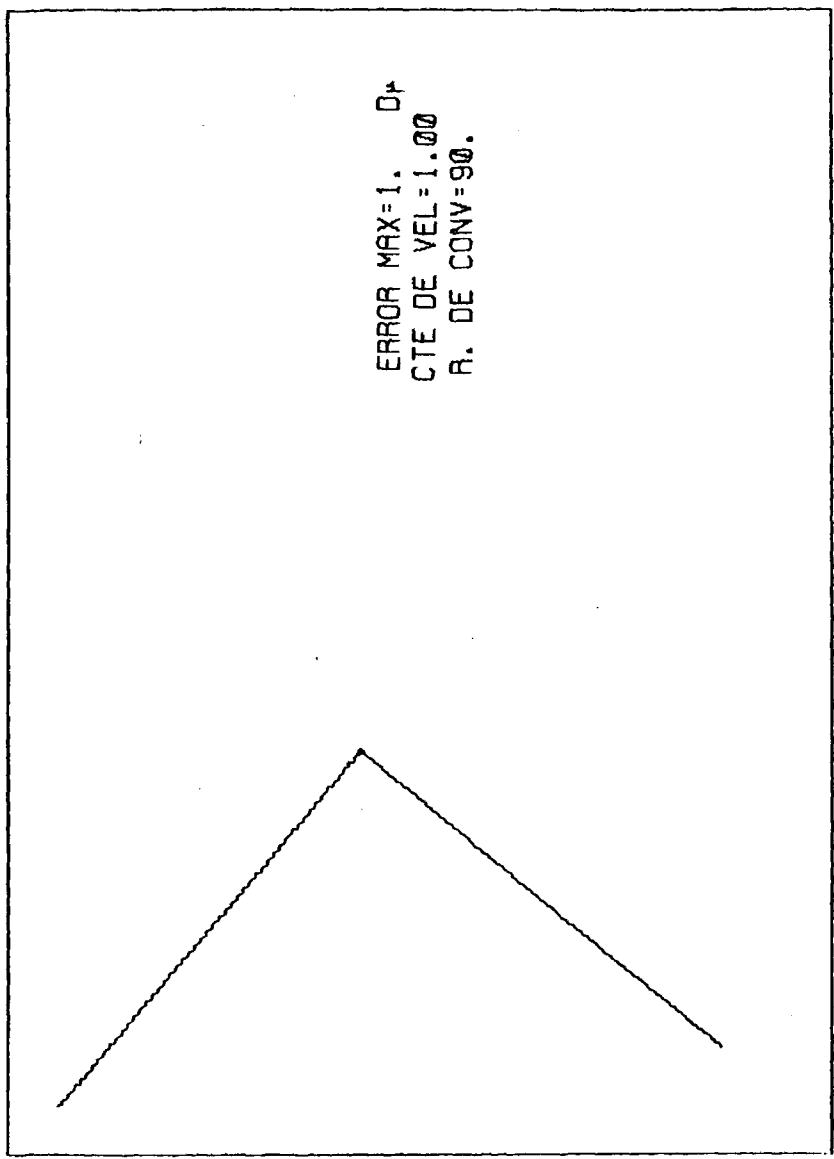


FIGURA 4.3



TAU= 20. MSEG

FIGURA 4.4

Esta consideración ha llevado a realizar un estudio de los valores de rebasamiento alcanzado por el sistema así diseñado en tramos rectos en la gama de velocidades habituales en control numérico para la misma máquina-herramienta de 20 msg de constante mecánica en sus motores. Los resultados aparecen en la figura 4.5, donde el eje de abscisas ofrece una velocidad (frecuencia de entrada al interpolador) variando entre 0 y 10 cm/seg, mientras que el eje de ordenadas muestra la imprecisión (rebasmiento) del final de tramo expresado en micras, con lo que se llega a la conclusión de que es preciso trabajar con velocidades de trazado muy bajas si se quiere conseguir una precisión aceptable.

Como alternativa se ha propuesto una solución que ha dado resultados totalmente aceptables: desdoblar cada tramo rectilíneo en dos, cosa que el microcomputador puede hacer por programa a partir de los datos de generación del contorno, que son suministrados por el fichero descrito en 4.3.1 para la simulación y en la realidad por el programa-pieza.

Uno de estos tramos sería casi la totalidad del tramo original recorrido a la velocidad programada, y el otro sería un tramo, que se puede denominar de "frenada" de pocas micras de longitud, frente a la habitual en programas-pieza reales, recorrido a velocidad baja, y cuya duración de ejecución en tiempo será una pequeña fracción del tiempo total invertido en generar el tramo original completo, con lo que no se sufre una disminución apreciable en las prestaciones reales del equipo de control

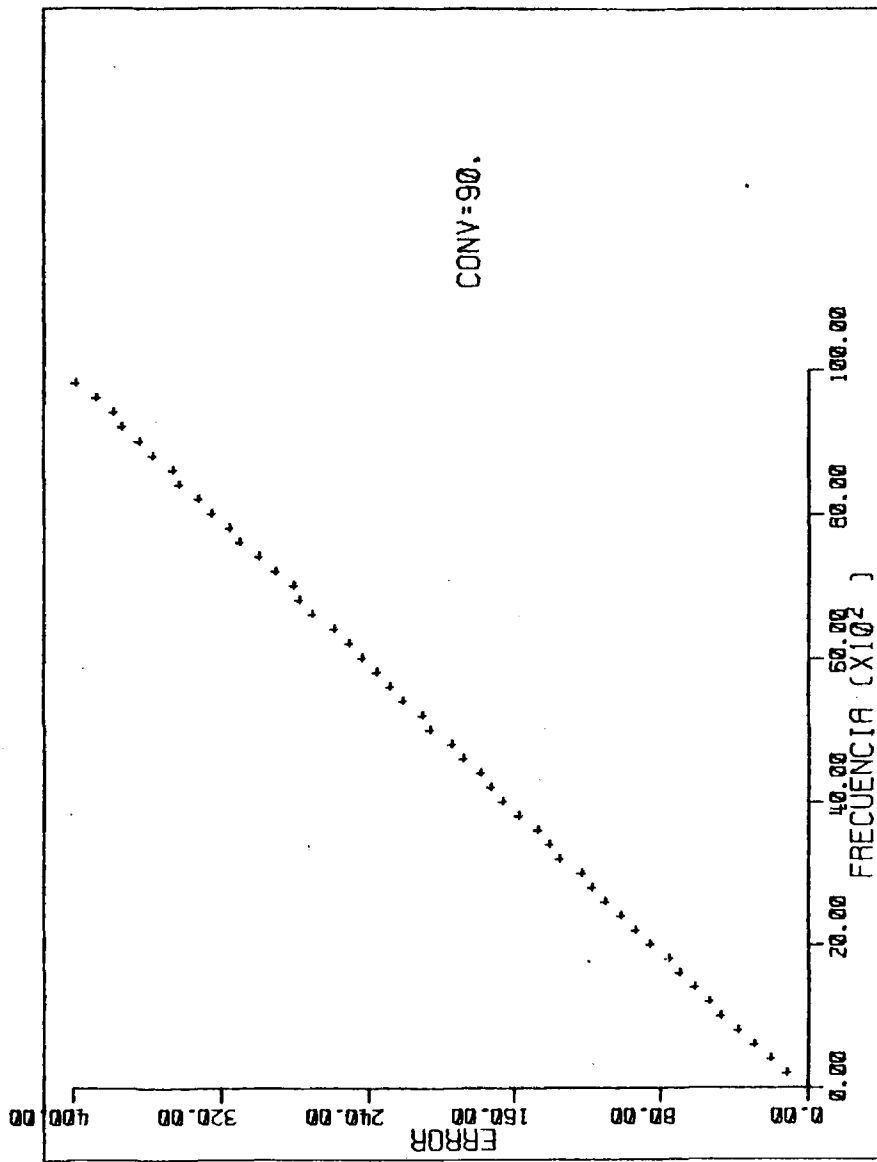


FIGURA 4.5

numérico, ganándose por el contrario considerablemente en la precisión alcanzada.

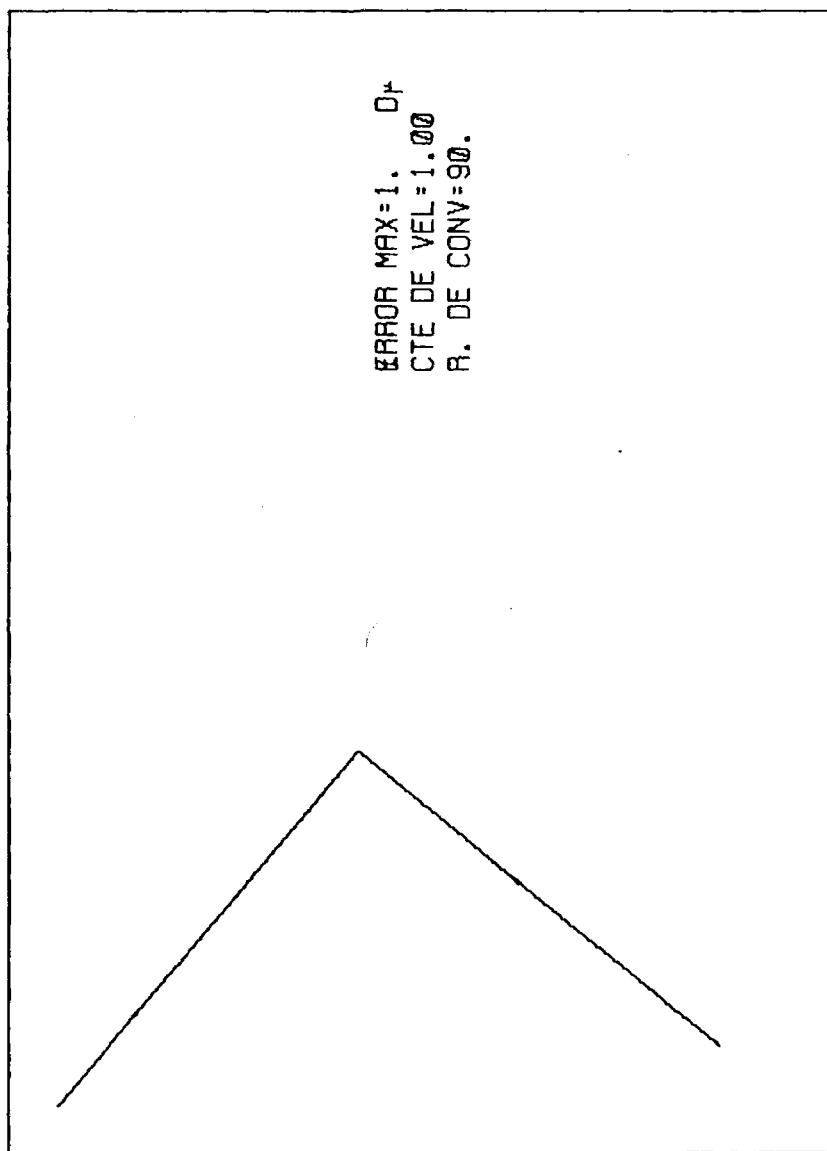
Una muestra de ello puede ser el ejemplo de trazado de un contorno angular lineal similar al de las figuras 4.3. y 4.4, pero realizado de acuerdo con los siguientes datos en el fichero de descripción de contornos:

```
5
0.,0.
4980.,5976.,3000.
5000.,6000.,200.
-976.,10980.,3000.
-1000.,11000.,200.
```

Los resultados se muestran en la figura 4.6. El error de precisión es similar al caso de la figura 4.4, pero la duración del proceso de contorno es muy poco superior al tiempo invertido en el ejemplo de la figura 4.3

Este desdoblamiento de cada tramo en dos lo podría introducir automáticamente el control numérico a través de una función preparatoria G. Mediante una cierta función G se introduciría una parada precisa en posicionamiento y mediante otra se introduciría un contorno con transiciones precisas (reducción de avance para transición precisa).





TAU=20. MSEG

FIGURA 4,6

### CONCLUSIONES

- 1.- Se ha realizado un estudio de los distintos tipos de sistemas de control numérico, relacionando y separando las tareas críticas y no críticas a realizar por éstos y considerando los condicionamientos que la inclusión de microprocesadores introducen en su diseño, lo que ha llevado a dirigir nuestra investigación hacia los puntos más conflictivos del diseño, a saber, el lazo de control de posición y el sistema interpolador.
- 2.- Se ha efectuado una revisión crítica de posibles alternativas de sistemas de control de posición, analizando sus ventajas e inconvenientes desde el punto de vista de su implementación electrónica y de su programación. Este estudio se ha extendido tanto a las características estáticas como dinámicas de los diversos servomecanismos, considerando aspectos tales como el análisis de estabilidad y tiempo de respuesta de los mismos.

Los resultados obtenidos nos han proporcionado criterios para la correcta elección del tipo de servomecanismos adecuado a cada caso concreto del diseño.

- 3.- Se ha obtenido una expresión de tercer grado que, en función de la constante de tiempo mecánica de cada motor y del período de muestreo utilizado, proporciona el valor óptimo de la ganancia en cada lazo de control de posición. A esta expresión se ha llegado utilizando como criterio de optimización del comportamiento del lazo el que minimiza la integral del valor absoluto del error.
- 4.- El valor límite de la aceleración centrípeta de avance en el contorno de arcos de circunferencia queda fijado en una expresión que relaciona dicho concepto con la precisión requerida, el período de muestreo, la constante de tiempo mecánica del motor y la ganancia óptima del lazo de control. Esta expresión se ha utilizado para relacionar la velocidad máxima de avance con el radio mínimo permitido.
- 5.- En el estudio exhaustivo realizado, se ha llegado a una clasificación de métodos no paramétricos de generación de curvas en tres grupos: método de Bresenham-Pitteway, método de Danielsson y método de Jordan, cada uno con sus derivados. El algoritmo de Jordan presenta el inconveniente de no ser lineal y trabajar en cuadrantes, resultado poco apropiado para su implementación por programa sobre un microcomputador. El método de Danielsson presenta

como principal inconveniente el que no permite movimientos simultáneos según los ejes, lo que limita excesivamente las velocidades de interpolación. El de Bresenham-Pitteway es el más perfecto, presentando entre otras las ventajas de ser lineal, trabajar en octantes y poseer un ciclo básico de generación de salidas muy breve.

- 6.- Se ha conseguido un algoritmo lineal absolutamente general que, además de tener un ciclo básico tan breve como el de Bresenham-Pitteway, simplifica notablemente el proceso de iniciación de variables y las rutinas de control y cambio de octante, principal inconveniente del método anteriormente citado, resolviendo además de forma sencilla el control de final de tramo. Por otra parte se ofrece la posibilidad de generación de rectas en el espacio de tres dimensiones, tema que no aparece documentado en la bibliografía.
- 7.- La implementación de los algoritmos encontrados junto con la simulación del servosistema completo para contorneo (aproximando el comportamiento del conjunto regulador-motor, por medio de un modelo con un único polo dominante, la constante de tiempo mecánica del motor) ha permitido medir la bondad de nuestro método de diseño.

8.- Todos los trabajos realizados han permitido el establecimiento de un método integrado de diseño que, a partir de las características mecánicas de la máquina-herramienta y de las restricciones en precisión, proporcionan los valores óptimos de los parámetros fundamentales del sistema.

Con estos resultados se ha cubierto una primera y fundamental etapa, la del diseño de controles numéricos de máquinas-herramienta basados en microprocesadores.

La fuerte dependencia del exterior que existe en este campo tecnológico da a nuestras investigaciones una especial importancia industrial, ya que pueden proporcionar una tecnología nacional en el campo del control numérico que aumente la competitividad de nuestras máquinas-herramienta.

## B I B L I O G R A F I A

Las referencias bibliográficas se presentan agrupadas en dos partes.

En la primera figuran las referencias citadas en el texto, clasificadas por orden alfabético para facilitar su localización.

En la segunda aparecen otras publicaciones consultadas y que guardan estricta relación con los temas tratados en esta memoria, habiéndose preferido no incluir las referencias consultadas de carácter general.

REFERENCIAS QUE SE CITAN EN EL TEXTO

- AL77      Alabau, A.; Figueras, J. "Microcomputadores". Investigación y Ciencia. Noviembre 1977
- AL78      Alique J.R. y otros. "Electrónica y Automática Industrial". Marcombo, S.A. 1979 (en prensa)
- BR65      Bresenham, J.E. "Algorithm for Computer Control of a digital plotter" IBM Systems Journal. 4,1 1965.
- BR77      Bresenham, J.E. "A linear Algorithm for Incremental Digital Display of Circular Arcs". Comm. of the ACM. Feb 1977.
- DA70      Danielsson, P.E. "Incremental Curve Generation" IEEE Transactions on Computers. Septiembre 1970.
- IS75      Norma Intenacional    ISO   1056.   1975
- J073      Jordan, B.W.; Lennon, W.J.; Holm, B.C. "An improved algorithm for the generation of nonparametric curves" IEEE Transactions Computers. Dic 1973.
- K078      Koren, Y.; Bollinger, J.G. "Design parameters for sampled-data drives for CNC machine-tools". IEEE Transaction on Industry Applications, Vol: IA-14 n° 3. 1978.

- PI67        Pitteway, M.L.V. "Algorithm for Drawing Ellipses or Hiperbolae with a Digital Plotter. Computer Journal. Nov. 1967.
- PI74        Pitteway, M.L.V. "Integer Circles, etc- three move extension of Bresenham's Algorithm". Computer Graphics and Image Processing. Sept.1974
- PI74a       Pitteway, M.L.V. "Integer Circles- some further thoughts". Computer Graphics and Image Processing, Sept. 1974.
- P072        Poo, Aun-Neow; Bollinger, J.G.; Younking, G.W. "Dynamic errors in type 1 contouring systems". IEEE Transactions on Industry Applications.Vol IA-8 n° 4. 1972.
- SA76        Savage, R. "The influence of microprocessors on the evolution of numerical control systems". Proceedings 16th IMTDR Conf. 1976.
- SI68        Sizer, T.R.H. "The digital Differential Analyser". Chapman and Hall Ltd. Londres 1968.
- UN74        United Nations Publication. "The machine Tool Industry". New York 1974.



REFERENCIAS QUE NO SE CITAN EXPLICITAMENTE EN EL TEXTO

- Olesten, N.C. "Numerical Control". Wiley 1970.
- Middleditch, A.E.; Paul, F.R. "Dynamic Performance of a computer numerical control system for multi-axis contouring machine-tools". ASME Papers for Meeting. Nov. 1973.
- Middleditch, A.E. "Design criteria for multi-axis closed loop computer numerical control systems". Transaction of the ASME. Marzo 1974.
- Milner, D.A.; Rakic, M. "Software program implementation in DNC system". 15th Autom. Control Conf. University of Texas, 1974.
- Poo, A.N.; Bollinger, J.G. "Digital-analog servo system design for CNC". 9th Annual Meeting of the IEEE Ind. App. Society. October 1974.
- Koren, Y. "Interpolator for a Computer Numerical control system". IEEE Trans. Computers. V25 n°1 1976.
- Florine, J.; Lecoq, H. "Introduction au calcul incremental: etude de l'operation d'integration". Revue A., X, 2. 1968.

- Lecoqc, H. "L'analyseur differential numerique incremental". Revue A, XI, 3. 1969.
- Bergren, C. "A simple algorithm for circular interpolation". Control Engineering, Sep. 1971.
- Alique, A.; Alique J.R., y otros. "Nuevas tendencias en la generación de curvas. Métodos no paramétricos y su aplicación al control numérico". Actas del 2º Congreso Nacional de Investigación Diseño y utilización de Máquinas-herramienta. 1978.
- Alique, A.; Alique J.R.; y otros' "Diversas alternativas de sistemas de control de posición para un CNC". Actas del 2º Congreso Nacional de Investigación, Diseño y Utilización de máquinas-herramienta. 1978.
- Alique, A. ; Guillen, J.M.; González, C. y otros. "Estudio y simulación del comportamiento dinámico del sistema completo de control para un CNC". Actas del 2º Congreso Nacional de Investigación, Diseño y utilización de Máquinas-herramienta. 1978.
- Alique, A.; Alique J.R.; y González, C. "Influencia de los microprocesadores en el diseño de un control numérico con computador de máquinas-herramienta". Actas de las Primeras Jornadas de microprocesadores. 1978.

- Koren, Y.; Shani, A.; Ben-Uri, J. "Numerical control of a Lathe". IEEE Transaction and Gen Appl. vol IGA-6 n° 2. 1970.
- Bergren, C.A. "Do parabolic interpolation with less memory". Control Engineering. Mayo 1975.
- Poo, A.N.; Bollinger, J.G. "Digital- Analog servo system design for CNC". IC-WED-AM3. 1974.
- Alique, A.; Mochón, J.; y otros. "Posibilidades de los sistemas de inteligencia distribuida en controles numéricos con computador" Actas del 2º Congreso Nacional de Investigación, Diseño y Utilización de Máquinas-herramienta. 1978.
- Soubies- Camy. "Theorie et pratique des systemes et langages de commande numerique des machines-outils". Editions Radio
- Cardon, M. "La commande numerique pour tous". Machine -outil. 1972.
- Kuo, B.C. "Analysis and synthesis of sampled data control systems". Prentice Hall. Englewood Cliffs, N.J., 1963.
- Elgerd, O.I. "Control system theory". Mc Graw-Hill Book 1967.

- Koren, Y. "Design of a Digital Loop for numerical control". IEEE Ind. Electronics, Vol 25 n° 3. August, 1978.
- Murray, J.M.; Wiatrowski, C.A. "Microcomputer Peripherals". IEEE Ind. Electronics, Vol 25 n° 4. Nov. 1978.
- Sanz Tudela, F. "Realización de una biblioteca de subrutinas para el trazado de cónicas con optimización de operaciones". Trabajo de Licenciatura. Universidad Complutense de Madrid. Diciembre 1976.